En torno a las designaciones de *raíz* y sus notaciones: una muestra de la consolidación del álgebra sincopada en el Renacimiento hispano*

Itziar Molina Sangüesa
Universidad de Salamanca

Resumen. El objetivo de este trabajo es, por un lado, estudiar la terminología algebraica referida a las distintas designaciones de las raíces y, por otro, destacar el empleo de ciertas abreviaturas referidas a las mismas, no solo como un mecanismo lingüístico para economizar el discurso, sino por lo que supuso en el desarrollo del álgebra —marcada, desde sus albores, por un estilo puramente retórico— hacia la ciencia eminentemente simbólica en la que se ha erigido. En este proceso evolutivo que va de la *palabra* al *símbolo*, la etapa del Renacimiento, caracterizada por la alternancia de los vocablos acuñados por los algebristas italianos *vs*. alemanes y por la proliferación de abreviaturas en la notación algebraica (como, por ejemplo, para la expresión de las raíces), es fundamental; por este motivo revisaremos, analizaremos y estudiaremos estas cuestiones en cuatro de los tratados matemáticos más representativos del Quinientos hispano: *Conpusición de la arte de la Arismética y de Geometría* (1512) de Juan de Ortega, *Libro primero de Arithmética algebrática* (1552) de Marco Aurel, *Arithmética práctica y speculativa* (1562) de Juan Pérez de Moya y *Libro de Álgebra en Arithmética y Geometría* (1567) de Pedro Núñez Salaciense.
Palabras clave: léxico científico-técnico, etimología, abreviaturas (notaciones matemáticas), Álgebra, Renacimiento.

Data de recepción: 26.02.2014 · Data de aceptación: 14.08.2014.

* Este trabajo se inserta en el marco del proyecto I+D+i: «El *Diccionario de la Ciencia y de la Técnica del Renacimiento* (*DICTER*): fases finales» (Ref.: FFI2010-16324/FILO), financiado por la Dirección General de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación. Estas investigaciones se han podido llevar a cabo gracias a la ayuda predoctoral (FPU) concedida en 2011 por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (Ref.: AP2010-3663).

Abstract. The objective of this paper is, on one hand, study the algebraic terminology relating to the different designations of the roots and, in the other hand, highlight the use of some abbreviations in mathematical language, not only as a linguistic mechanism to economize written discourse, but also which resulted in the development of algebra —marked, from its inception, by a purely rhetorical style— to eminently symbolic science that has emerged. In this evolutionary process from the *word* to the *symbol*, the Renaissance stage, characterized by alternating the words coined by the Italian *vs*. German algebraists and by the proliferation of abbreviations in algebraic notation (for example, for the expression of the roots), is essential; reason for we will review, analyze and study these questions in four of the most representatives mathematical treatises of the Spanish sixteenth century: *Conpusición de la arte de la Arismética y de Geometría* (1512) by Juan de Ortega, *Libro primero de Arithmética algebrática* (1552) by Marco Aurel, *Arithmética práctica y speculativa* (1562) by Juan Pérez de Moya and *Libro de Álgebra en Arithmética y Geometría* (1567) by Pedro Núñez Salaciense.
Keywords: scientific-technical lexicon, etymology, abbreviations (mathematical notations), Algebra, Renaissance.

1. PRESENTACIÓN

El objetivo de este estudio es, por un lado, estudiar la terminología algebraica referida a las distintas designaciones de las raíces y, por otro, destacar el empleo de ciertas abreviaturas referidas a las mismas, no solo como un mecanismo lingüístico para economizar el discurso, sino por su relevancia en la configuración de una terminología científica que deja constancia del desarrollo, evolución y consolidación del álgebra en uno de sus tres estadios o periodos: el del *álgebra sincopada*, característica del Renacimiento.

Para ello centramos el análisis en los cuatro tratados matemáticos más representativos del siglo XVI hispano: *Conpusición de la arte de la Arismética y de Geometría* (1512) de Juan de Ortega[1], *Libro primero de Arithmética algebrática* (1552) de Marco Aurel[2], *Arithmética práctica y speculativa* (1562) de Juan Pérez

[1] Palentino de origen (¿?-1542) y dominico adscrito a la provincia de Aragón, enseñó Aritmética y Geometría en España e Italia, privada y públicamente (Rey Pastor 1926: 67). Su tratado de aritmética mercantil, cuyo propósito era esencialmente de carácter práctico, fue redactado, según palabras del autor, «porque no passasen tantos fraudes como pasan por el mundo de las cuentas» (1512: f. 1v). Esta obra fue una de más importantes en el panorama científico de la península ibérica a lo largo del Quinientos, motivo por el que alcanzó numerosas ediciones (*cfr*. Rey Pastor 1926: 71; Paradis-Malet 1989: 232).

[2] Se conocen pocos datos sobre su biografía; de origen alemán y afincado en Valencia, fue maestro de escuela (1541) y publicó la primera obra impresa en España cuyos contenidos versan sobre la *regla de la cosa* o Álgebra, de ahí que en el prólogo exponga (1552: f. IIIr): «es cosa nueva lo que trato y jamás vista ni declarada, y podrá ser que ni aun entendida ni imprimida en España» (*cfr*. Picatoste 1891; Rey Pastor 1926; Paradis-Malet 1989).

de Moya[3] y *Libro de Álgebra en Arithmética y Geometría* (1567) de Pedro Núñez Salaciense[4], pertenecientes al corpus del *Diccionario de la Ciencia y de la Técnica del Renacimiento* (*DICTER*)[5], editado por Mancho y Quirós (2005).

En primer lugar, examinaremos la etimología de los términos objeto de nuestro estudio: la serie de raíces algebraicas de un número —comprendidas entre la 1ª y la 6ª— y su tipología, así como su significado, clasificación y posibles definiciones, que testimoniaremos mediante ejemplos extraídos del corpus del *DICTER*. A continuación, analizaremos las abreviaturas empleadas por los matemáticos del Quinientos para la expresión de dichas raíces. Finalmente, extraeremos unas conclusiones.

2. EL ÁLGEBRA EN EL RENACIMIENTO

El álgebra, disciplina que surge como una vertiente elevada o complemento de las aritméticas comerciales o calculísticas del s. XVI, fue desarrollada por griegos, hindúes, babilonios y egipcios (*cfr*. Bell 2000[5], Boyer 2003[2], Maracchia 2008[2], etc.). Sin embargo, se considera que su implantación y desarrollo en Occidente proviene del libro titulado: *Kitab al-Mukhtasar fīhisāb al-jabr w'almuqābala*[6] (ca. 825), escrito por Muhammad ibn Mūsa al-Kwārizmī (Bagdad, ca. 780-¿?850).

Esta rama de las matemáticas, tal y como atestiguan los tratados matemáticos del Quinientos, presenta en el Renacimiento diversas designaciones: por un lado, los arabismos *Álgebra* (< ár. *al-jabr* 'restauración') y *Almucábala* (< ár. *almuqābala*

---

3 Matemático andaluz (Santisteban del Puerto, ca. 1513-Granada, 1597), fue uno de los autores más célebres del panorama científico del s. XVI hispano debido a su labor divulgativa. Su obra alcanzó multitud de ediciones (unas 30, desde la fecha de su primera publicación en 1562 hasta 1875) y fue muy conocida dentro y fuera de nuestras fronteras (*cfr*. Picatoste 1891; Rey Pastor 1926; Leal y Leal 1971-1972; Valladares Reguero 1997).

4 Cosmógrafo y matemático portugués (Alcácer do Sal, 1502-Coimbra, 1578), es, junto a Pérez de Moya, otro de los autores más destacados del Quinientos (*cfr*. Picatoste 1891; Rey Pastor 1926; Sousa 1985). Su *Libro de Álgebra*, publicado 30 años antes en lengua materna: portugués, tal y como explicita el autor en el prólogo (1567: ff. IIIr-IIIv), supuso un gran avance, ya que «al dedicar las dos primeras partes al Álgebra como tal confiere este a saber una entidad propia, que hasta entonces no se le había concedido. Si tenemos en cuenta que su libro fue escrito hacia 1537 podemos decir que se anticipó a Cardano, que es considerado el primero que dio autonomía al Álgebra en su obra: *Ars Magna*, publicada en el año 1545» (Flórez Miguel 2006: 418), aspecto que Massa Esteve denomina como «la algebrització de les matemàtiques», esto es, «quan l'àlgebra comença a ser considerada una disciplina independent dins de la matemàtica» (2010: 101).

5 Véase <http://dicter.eusal.es/?idContent=elenco_obras>.

6 Traducido como *Libro conciso de cálculo de restauración y oposición.* A propósito de las principales traducciones latinas de esta obra, realizadas por Adelardo de Bath, Roberto de Chester y Gerardo de Cremona, léanse Vernet (1978, 2006[2]) y Vera (1991).

'oposición') y, por otro, el compuesto *Regla del álgebra*, vulgarmente denominada *Regla de la cosa*, es decir, la regla o método para resolver y averiguar el valor de la incógnita de un problema dado, que deriva de la traducción del vocablo árabe *shay'* (con el que se designaba a la cantidad ignota o desconocida) al latín RES 'cosa', y de ahí, finalmente, al italiano *còsa*, e incluso *Regla del cos* (que procede de la adaptación del término italiano *còsa* al alemán: *coss*) o *Arte Mayor* (en contraposición con la aritmética, considerada un arte menor). Así lo ponen de manifiesto Marco Aurel y Juan Pérez de Moya:

> La *Regla* vulgarmente llamada *de la cosa* o *Arte mayor*, que por su propio nombre (como dize Guillelmo de Lunis, que es el que primero trasladó la dicha Regla de arábigo en lengua italiana) se llama *Álgebra* y *Almucábola*, que es restauratio et oppositio (Aurel 1552: f. 68v).

> Diversos nombres tiene esta regla acerca de varios authores. Unos la llaman *Regla de Álgebra*, que quiere decir restauratio, o *almucábala*, que quiere decir opposición o absolución, porque por ella se hazen y absuelven infinitas qüestiones (y las que son impossibles nos las demuestra) assí de Arithmética como de Geometría, como de las demás artes (que dizen) mathemáticas. Otros la nombran *Regla de la cosa* o [*Regla*] *del cos*, porque obrando el nombre bien se le allega. Otros, *Reglas reales* o *Arte mayor*. Llámese como cada uno quisiere; su fin no es otro sino mostrar hallar algún número proporcional dudoso demandado (Pérez de Moya 1562: 448).

De acuerdo con la clasificación establecida por Nesselmann (1842), el álgebra desarrollada por al-Kwārizmī, en este primer estadio primitivo, es un *álgebra retórica* —expresada únicamente mediante instrucciones verbales[7]—, que evolucionará unos siglos después hacia lo que se conoce como *álgebra sincopada* en la que, según Etayo Miqueo (1986: 147), «se intercalan abreviaturas para hacer más ágil el razonamiento, que sigue expresándose sin embargo en palabras», es decir, momento en el que «el álgebra se escapa de las instrucciones verbales y va hacia las direcciones simbólicas, dejando de ser puramente retórica» (Bell 2000[5]: 78), aspecto que comprobaremos y examinaremos a lo largo de este trabajo.

---

7 «Característica que se mantendrá a lo largo de los años por los matemáticos árabes, perdiéndose los pocos vestigios de tipo simbólico que se encuentran en la obra de Diofanto o en la obra de los hindúes» (Paradis-Malet 1989: 50). Para más información léase Bell (2000[5]: 105-107). Sobre las abreviaturas o notaciones empleadas por Diofanto, *cfr*. Nesselmann (1842) o Cajori (1993: 71-73).

3. ANÁLISIS DE LAS RAÍCES

3.1. *Raíz*

El término *raíz*, del latín RĀDIX, -ĬCIS 'íd.', según el *Diccionario Crítico Etimológico Castellano e Hispánico* (*DECH*) de Corominas y Pascual, además de designar, al igual que *cosa* y *lado*, «cada uno de los valores que puede tener la incógnita de una ecuación» (*DRAE*[22]), es el nombre que los matemáticos de esta centuria empleaban para referirse, en líneas generales, a la «cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado» (√), de acuerdo con la interpretación de los textos del corpus manejado:

> Como quier que en todos los capítulos y sumas aquí declarados y puestos, ansí del sumar, como del restar, y multiplicar, y partir y de las *raízes*, se aya puesto la manera de cómo se a de fazer, conviene agora dar pruevas para cada una d'ellas para ver si qualquiera cuenta que fizieres está buena o falsa (Ortega 1512: f. 33v).

> Si te vinieren algunas *rayzes* de diversos géneros y las quisieres summar, restar, o hazer d'ellas alguna otra cosa, tendrás aviso de reduzirlas a un género y después seguirás la regla que fuere, como por los exemplos siguientes mejor entenderás (Pérez de Moya 1562: 495-496).

No obstante, el vocablo *raíz* se emplea, en una segunda acepción, para referirse a la «cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una vez para obtener un número determinado» (*DRAE*[22]), es decir, la *raíz cuadrada* ($\sqrt[2]{\cdot}$) de un número *x*:

> El qual nombre siempre devemos explicar en toda *raíz*, así escriviendo como hablando, excepto en la raíz segunda o quadrada, porque en ésta, si simplemente dizimos *raíz* de tal número, entendemos que es quadrada (Núñez 1567: f. 45r),

la primera en la clasificación o jerarquización, formada por una serie de compuestos en los que la base —el sustantivo *raíz*— «se encuentra restringida por una expansión especificadora de la forma adjetiva, pospuesta al núcleo[8]» (Mancho Duque 2010: 375), que, a continuación, detallamos.

---

8 De hecho, afirma Mancho Duque (2010: 375), que el sustantivo «reenvía a una clase e indica la categoría a que pertenece un concepto, mientras que la expansión determina un subconjunto de esta clase y señala el criterio para la subdivisión de la categoría. El resultado es la construcción de un paradigma, donde el posible carácter neológico de sus miembros, tiene que ver tanto con el elemento en función adjetiva, como también con la propia combinación sintagmática, la unidad

3.2. *Raíz cuadrada* o *raíz segunda*

Este compuesto sintagmático formado por la base o núcleo: *raíz* y el adjetivo *cuadrada* (del latín *quadrātus*, *-a*, *-um*, según el *Oxford Latin Dictionary*, *OLD*) —que evoca connotaciones geométricas— aparece, con suma frecuencia (más de 400 ocurrencias), en la totalidad de los tratados revisados:

> Quiero poner brevemente un enxemplo por el qual conoscerás qualquiera d'estas dos raízes, el qual es el siguiente: multiplica 3 por sí mesmo y serán 9. Estos tres serán *raíz quadrada*, porque, multiplicándose por sí mesmo, son 9, que no sobra ni falta. Pues, ¿quál será cúbica? Los mesmos tres, porque los as de tres doblar, tornando a multiplicar con ellos mesmos 9, de quien los 3 es *raíz quadrada*, diziendo: 3 vezes 9 son 27, y ansí que los 3 son *raíz quadrada* de 9 y son raíz cúbica de 27 (Ortega 1512: f. 29v).

> Si fueren tres quantidades continuas proporcionales, y que la primera y tercera fuesen conoscidas, para hallar la segunda, multiplicarás la primera por tercera, y la *raýz quadrada* del producto será la segunda. Exemplo. Sea la primera quantidad 3 y la tercera 12. Multiplicando 3 por 12 hazen 36; la *raýz quadrada* de 36 es 6: este 6 es la segunda, y assí quedarán 3, 6, 12, las quales están en proporción continua dupla (Pérez de Moya 1562: 350).

Con todo, por otro lado, encontramos el compuesto *raíz segunda* —en el que al término *raíz* se adosa la forma femenina del adjetivo numeral ordinal: *segunda* (del latín *secŭndus*, *DECH*)—, del que es sinónimo, en la obra del matemático luso Pedro Núñez Salacience:

> Y toda raíz quadrada, ora sea número, ora sea raíz sorda, se dize *raíz segunda*, porque es raíz del censo o quadrado, el qual tiene 2 por denominación. Escrívese esta tal raíz por este modo: 2 raíz de 6, 2 raíz de 9 y es el valor de la cosa en esta arte de Álgebra (1567: f. 44r).

> Y la resolución d'esta doctrina de raízes simples es que todo número puede ser *raíz segunda*, tercera, quarta, quinta, sexta, séptima, y assí proceder en infinito por las denominaciones y, sin que reciba mudança, reciberá el nombre según la naturaleza de la dignidad a que fuere comparado. El qual nombre siempre devemos explicar en toda raíz, así escriviendo como hablando, excepto en la *raíz segunda* o quadrada, porque en ésta, si simplemente dizimos raíz de tal número, entendemos que es quadrada (1567: f. 45v).

En efecto, ambos se definen como la «cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una vez para obtener un número determinado» (*DRAE*[22]), que, en notación

denominativa en el tecnolecto matemático. En cualquier caso, la creación de estos compuestos lexicalizados responde a la necesidad de cubrir una laguna denominativa en el ámbito de esta disciplina».

simbólica actual, se expresa: $\sqrt[2]{\ }$. Así lo certifica el siguiente fragmento del *Libro de Álgebra* (1567: ff. 43r-43v) de Núñez:

> Por *raíz quadrada* entendemos un número que, multiplicado por sí mismo, haze otro número, el qual, por essa causa, se llama quadrado, assí como es 2 en respecto de 4, y 3 en respecto de 9, y 4 en respecto de 16, y 5 en respecto de 25. Y porque todo número puede ser multiplicado por sí mismo, será, por esta causa, todo número *raíz quadrada* de otro número, el qual se representa en forma quadrada. Pero no tiene todo número *raíz quadrada* perfeta y punctual, porque a ninguno d'estos: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, ny a muchos otros que van procediendo en infinito puede responder algún número que, multiplicado por sí mismo, lo restituya.

Sin embargo, hallamos una dicotomía o polarización entre dos tipos de *raíz cuadrada*: una *perfecta vs*. una *imperfecta* o *irracional*[9], en la clasificación establecida por los matemáticos de esta centuria, de la cual no hemos hallado testimonio alguno en ninguno de los repertorios lexicográficos consultados, ni siquiera en los especializados. En este sentido, la obra del dominico Juan de Ortega tiene un importante interés histórico —derivado del interés que encierran las extracciones de las raíces cuadradas y el estudio de los irracionales cuadráticos—, pues trabajó con detenimiento y meticulosidad el método de aproximación para hallar las mismas (*cfr*. Rey Pastor 1926: 72-81; Paradis-Malet 1989: 236-238; Vera 1991: 280-281).

Por lo que se deduce de los ejemplos, se podrían definir del siguiente modo: *raíz cuadrada perfecta* es la «raíz cuadrada cuya cantidad puede expresarse exactamente mediante un número» y, por el contrario, su antónimo, *raíz cuadrada imperfecta* o *irracional*, es la «raíz cuadrada cuya cantidad no puede expresarse exactamente mediante un número»:

> Si quieres probar qualquiera *raíz quadrada*, agora sea *perfecta* o *imperfecta*, farás ansí: quita luego los sietes de las figuras que an salido en la raíz y aquello que sobrare, sacando los sietes, ponello has encima de la cruz. Y, después, aquella figura que has puesto encima de la cruz, multiplicada por sí quadradamente, y toda aquella multiplicación que saliere, quitarás tanbién los sietes [...]. Y, después, yrás a la suma principal y sacarás los sietes d'ella,

9 El resultado *irracional* de una *raíz cuadrada* tiene un valor conocido, cuya cantidad no puede expresarse exactamente mediante un número. La palabra *sordo*, explica Bentley (2008: 84), «en un principio tenía el mismo significado que *irracional*», consecuencia de las traducciones árabes del siglo IX, que tradujeron la palabra griega ἄλογος 'irracional, inexpresable' como *assamn* 'sordo, mudo'. «A los matemáticos árabes les gustaba pensar en los números racionales como audibles y los irracionales como inaudibles. Su palabra se tradujo posteriormente al latín como *surdus* 'sordo'. Actualmente, a los números sordos se les considera números irracionales que no se pueden escribir de otra manera que esta: $\sqrt{5}$» (*cfr*. Bentley 2008: 84).

> y aquello que sobrare ponello as debaxo del brazo izquierdo, y si fueren semejantes las dos letras, estará verdadera; si no, estará falsa (Ortega 1512: f. 42v).

> Quando haviendo sacado raýz de algún número sobrare algo, pondrás lo que sobrare sobre una raya y doblarás la raýz del tal número y añádele uno, y ponerlo has debaxo por denominador. Exemplo. La raýz de 27 es 5 y sobran dos; pon los dos que sobran sobre una raya y dobla los 5 que vinieron por raýz y añádeles uno, y serán 11, los quales pondrás debaxo de los 2 y assí dirás que la *raýz quadrada imperfecta* o *irracional* de 27 es 5 y dos onzenes (Pérez de Moya 1562: 464).

Es muy interesante observar las connotaciones que subyacen de los adjetivos, esto es, *perfecto* (del latín *perfectus*, participio de *perficĕre* 'perfeccionar', *DECH*) se considera al número entero e *imperfecto* (del latín *imperfectus*, *-a*, *-um*, *OLD*) o *irracional* (lat. *irratiōnālis*, *OLD*) a lo inexpresable o inconmensurable, cuya clasificación y naturaleza se detalla en el libro X de los *Elementos* de Euclides, en el que el matemático griego expone la clasificación sistemática de las formas: «a ± √b, √a ± √b, √a ± √b y √√a ± √b, donde *a* y *b*, cuando son de la misma dimensión, son conmensurables, racionales» (Boyer 2003[2]: 159) y a la inversa, inconmensurables, por tanto, irracionales. Estos detalles amplían la concepción primitiva y pitagórica de número y, en consecuencia, permite que las matemáticas, en general, y las propiedades de los números, en particular, evolucionen hacia una teoría de números.

3.3. *Raíz cúbica* / *cuba* o *raíz tercera*

El siguiente compuesto nominal, formado por el sustantivo *raíz* y el adjetivo *cúbica* (tomado del latín *cubicus*, *-a*, *-um* y éste del gr. κυβικός, *OLD*) se define, según el *DRAE*[22], como la «cantidad que se ha de multiplicar por sí misma dos veces para obtener un número determinado» (en simbolismo actual, $\sqrt[3]{.}$):

> Número cubo es (según Euclides en la segunda del séptimo) un número que procede de la multiplicación de tres números iguales en quantidad y género. Así como 2, 2, 2, multiplicados unos por otros, diziendo: 2 vezes 2 son 4 y 4 vezes 2 son 8; este 8 se dize número cubo y el uno de los tres doses se dize *raýz cúbica* (Pérez de Moya 1562: f. 33r).

> *Raíz cúbica* se dize qualquier número, quando, multiplicado por sí mismo y después por lo que se haze por essa multiplicación, que es el su quadrado, haze otro número. El qual número así produzido se dize número cúbico, y el que primeramente se multiplicó es la su *raíz cúbica*, como es 2 en respecto de 8 y 3 en respecto de 27. Y porque el cubo tiene 3 por denominación, llámase raíz tercera y escrívese por este modo: 3 raíz de 8, 3 raíz de 27 (Núñez 1567: f. 44v).

Además, documentamos, por un lado, el compuesto formado por su variante *cuba* (tomado del latín *cŭbus* y éste del gr. κύβος, *DECH*), esto es, *raíz cuba* —designación empleada en la *Suma* (1494) de Pacioli[10]—, aunque exclusivamente en la clasificación llevada a cabo por el matemático portugués[11]:

> Y porque esto todo se halla en las dos partes de 26, que son 8 y 18, porque 8 es cubo y el tercio de 18 es 6, que es número entero sin quebrado y es la mitad de lo que queda, que es 12, tomaremos luego la *raíz cuba* de 8, la qual es 2, por el mayor nombre de la *raíz cuba* de 26 más raíz de 675, si él es cubo binomio, y, si lo es, será esse número 6 produzido por la multiplicación d'esse mayor nombre, que es 2, en el quadrado del menor nombre de la *raíz cuba* que buscamos (Núñez 1567: f. 116v).

Y, por otro lado, en paralelismo o por analogía con el sintagma *raíz segunda*, hallamos, de nuevo en el tratado de Núñez Salaciense, el compuesto *raíz tercera*, formado por el sustantivo femenino *raíz* y el adjetivo numeral ordinal *tercero* (del latín *tertĭārĭus* 'íd.', *DECH*), cuyo significado, al igual que *raíz cúbica* o *raíz cuba*, del que es sinónimo, se percibe en el siguiente fragmento:

> Y porque el cubo tiene 3 por denominación, llámase *raíz tercera* y escrívese por este modo: 3 raíz de 8, 3 raíz de 27 […]. Exemplo d'esta raíz assí nombrada: *raíz tercera* de 64; el número 64 es aquél a quien se refiere, y la palabra tercera o tres nos declara su naturaleza, la qual es raíz cúbica (ff. 44v-46r).

Asimismo, aparece una distinción entre *raíz cúbica perfecta* e *imperfecta* en la obra de Juan de Ortega:

> Síguese quál se llamará *raíz cúbica imperfeta*: Aquella se llamará *inperfeta raíz cúbica* que, después que has sacado la raíz de alguna suma de quien quieres sacalla, que queda o sobra alguna cosa […]. La *perfeta raíz cúbica* es aquella que, quandoquiera que de alguna suma sacares la raíz, que después que la ovieres sacado no sobre ni falte, como lo verás en este enxemplo que adelante pondré (1512: f. 30v).

---

10 Luca Pacioli (Sansepolcro, 1445-Roma, 1517) fue uno de los autores más sobresalientes del Quattrocento italiano y es considerado como «il punto de partenza della matematica del Rinascimento» (Giusti-Maccagni 1994: 15). Su obra, titulada: *Suma de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (1494), es la primera obra matemática impresa en lengua vernácula y el último de los tratados del ábaco. La *Summa* de Pacioli compiló todos los conocimientos de álgebra de los siglos anteriores —esto es, los contenidos de aritmética y álgebra del *Liber Abacci*— en una sola obra de carácter enciclopédico, motivo por el que, según Martín Casalderrey (2000: 84), «se convirtió en la lectura básica para los algebristas del s. XVI, que, apoyados en ella, pudieron hacer nuevos descubrimientos».

11 En línea con la corriente italiana del pensamiento matemático, de la cual era un buen conocedor (*cfr*. Molina Sangüesa 2015).

> Si quieres provar qualquiera *raíz cúbica*, *perfecta* o *imperfecta*, farás ansí: quita luego los sietes de las figuras que an salido en la raíz y aquello que sobrare, sacando los sietes, ponello as encima de la cruz [....]. Y, después, mira si son semejantes las dos letras que están debaxo de la cruz, porque si fueren semejantes estará verdadera; si no, estará falsa (1512: f. 42v-43r).

Tal y como se puede interpretar en los ejemplos expuestos, se podrían definir así: *raíz cúbica perfecta* es la «raíz cúbica cuya cantidad puede expresarse exactamente mediante un número» y, por el contrario, su antónimo, *raíz cúbica imperfecta*, es la «raíz cúbica cuya cantidad no puede expresarse exactamente mediante un número».

3.4. *Raíz* (*cuadrada*) *de raíz* (*cuadrada*) o *raíz cuarta*

Esta denominación, constituida mediante la reduplicación del sustantivo *raíz* —o, en ocasiones, *raíz cuadrada*—, pone de manifiesto, al igual que para la expresión de las distintas potencias de la incógnita, el empleo del principio multiplicativo como mecanismo por el cual se generan cantidades superiores, más elevadas (técnica que proviene de las matemáticas primitivas, como la desarrollada por el griego Diofanto[12], entre otros).

Efectivamente, la *raíz de raíz* o *raíz cuadrada de raíz cuadrada*, designa la «cantidad que se ha de multiplicar por sí misma tres veces para obtener un número determinado» ($\sqrt[4]{.}$):

> Para tratar tales números y otros semejantes, sería cosa larga y no galana poner los tales nombres a la larga. Mas desseando huyr esto y evitar toda prolixidad, procuré poner aquí algunos que para en esta arte eran necessarios. Y son r., rr., rrr., ru., rru., rrru., +, –, de los quales el primero significa y quiere dezir raýz quadrada; el segundo, *raýz quadrada de raýz quadrada* o *raýz de raýz*; el tercero, raýz cúbica; el quarto, raýz universal; el quinto, raýz de raýz universal; el sexto, raýz cúbica universal; el séptimo, más, y el octavo, menos (Núñez 1567: f. 43v).

> Por *raíz de raíz* o *raíz quarta* entendemos qualquier número, que, multiplicado por sý y después por lo produzido por essa multiplicación, que es el quadrado, y otra vez por lo

12 Se conocen pocos datos sobre su biografía. Vivió en la que se denomina como la «Edad de Plata» de la matemática griega, según Boyer (2003[2]: 235), «en el siglo que va del año 250 al 350 aproximadamente», en Alejandría, ciudad que ocupó el mayor centro de actividad matemática sin precedentes en la historia. Se considera a Diofanto de Alejandría como el más importante de los algebristas griegos, ya que su *Arithmética*, al estar divorciada de los métodos geométricos, en línea con el álgebra babilónica, destaca por la introducción de símbolos para la expresión de las distintas potencias de la incógnita y para las relaciones y operaciones entre números (*cfr*. Cajori 1993), de ahí la originalidad y relevancia de la misma, propia de un álgebra más avanzada: *álgebra sincopada*, que no se retomará hasta el s. XV.

produzido por essa segunda multiplicación, que es el cubo, haze, finalmente, otro número, el qual es quadrado del quadrado del primero número y, por esta causa, esse primero número que fue multiplicado por sí se dize *raíz de raíz* (Núñez 1567: f. 44v).

No obstante, también hallamos otras posibilidades terminológicas, como el compuesto *raíz cuarta*, sinónimo de *raíz de raíz*, documentado en el ecuador de la centuria, concretamente en el primer libro de álgebra publicado en España, la *Arithmética algebrática* (1552):

La práctica de las raízes no es menos necessaria en esta arte que la de las dignidades. Dos differencias ay de raízes, porque unas son simples y otras son compuestas. Las simples son en muchas maneras, scilicet: raíz quadrada o raíz segunda; raíz cúbica o tercera; raíz de raíz o *raíz quarta*; raíz relata o raíz quinta; raíz sexta; raíz séptima, raíz octava, y assí discurriendo por las dignidades (Aurel 1552: f. 43r).

Por raíz de raíz o *raíz quarta* entendemos qualquier número, que, multiplicado por sý y después por lo produzido por essa multiplicación, que es el quadrado, y otra vez por lo produzido por essa segunda multiplicación, que es el cubo, haze, finalmente, otro número, el qual es quadrado del quadrado del primero número y, por esta causa, esse primero número que fue multiplicado por sí se dize raíz de raíz (Aurel 1552: f. 44v).

Y también se dize *raíz quarta*, porque el número finalmente produzido, al qual se refiere, tiene 4 por denominación, assí como es 2 en respecto de 16 y 3 en respecto de 81, que son censos de censos o dignidades quartas. Y escrívese esta tal raíz por este modo: *raíz de raíz* 16, *raíz de raíz* 8; o assí: *4 raíz* de 16, *4 raíz* de 81 (Núñez 1567: f. 44v).

3.5. *Raíz relata* o *raíz quinta*

A continuación, documentamos el sintagma acuñado por el matemático italiano Luca Pacioli: *raíz relata* (del latín *relātus*, *OLD*), así como su sinónimo: *raíz quinta* (formada por el adjetivo femenino de origen latino *quīntus* 'íd.', *DECH*). Ambas designaciones no se recogen en ninguno de los diccionarios consultados, pero, por analogía con el resto de formas documentadas en el paradigma de *raíz*, se pueden definir como la «cantidad que se ha de multiplicar por sí misma cuatro veces para obtener un número determinado» ($\sqrt[5]{.}$). Así lo pone de manifiesto Núñez:

La práctica de las raízes no es menos necessaria en esta arte que la de las dignidades. Dos differencias ay de raízes, porque unas son simples y otras son compuestas. Las simples son en muchas maneras, scilicet: raíz quadrada o raíz segunda; raíz cúbica o tercera; raíz de raíz o raíz quarta; *raíz relata* o *raíz quinta*; raíz sexta; raíz séptima, raíz octava, y assí discurriendo por las dignidades (1567: f. 43r).

Y quando esta raíz de raíz se buelve a multiplicar por el quadrado de su quadrado, haze la quinta dignidad, que es relato primo, y ella se llama ya *raíz relata* o *raíz quinta*, como es 2 en respecto de 32, y escrívese por este modo: 5 raíz de 32. Y por esta misma arte se deven entender y escrevir las raízes de las otras dignidades (1567: f. 44v).

Y la *raíz quinta* de 48 sería la segunda quantidad, y de 48 para 32 es 5 vezes la proporción de las sus *raízes quintas* o *relatas* (1567: f. 108v).

3.6. *Raíz sexta*

Finalmente, encontramos el compuesto *raíz sexta*, formado por el adjetivo ordinal culto: *sexto* (tomado del latín *sĕxtus* 'íd.', *DECH*), para designar la «cantidad que se ha de multiplicar por sí misma cinco veces para obtener un número determinado» (que en notación o simbolismo actual se expresaría: $\sqrt[5]{.}$), en el *Libro de Álgebra* del matemático portugués:

Y será, luego, la raíz tercera de 8 convertida en *raíz sexta* de 64, y la raíz segunda de 9 será convertida en *raíz sexta* de 729 (Núñez 1567: f. 46v),

Exemplo: séannos propuestas *raíz sexta* de algún número y 3 raíz de 5, las quales queriendo reduzir a raízes de una misma naturaleza, diremos assí: porque 3, denominación menor, multiplicado por 2 haze 6, que es la mayor denominación, y esse número 2 es denominación de raíz quadrada o segunda, multiplicaremos, por tanto, el número 5 en sí mismo una sola vez, criando quadrado, y haremos 25. Quedará, luego, 5 raíz segunda de 25, pero la raíz tercera de 5 quedará *raíz sexta* de esse número 25 (Núñez 1567: f. 47v),

que llega a enumerar en una lista o sucesión hasta 8 raíces, postulando la posibilidad de crear infinitas raíces, tantas como dignidades:

La práctica de las raízes no es menos necessaria en esta arte que la de las dignidades. Dos differencias ay de raízes, porque unas son simples y otras son compuestas. Las simples son en muchas maneras, scilicet: raíz quadrada o raíz segunda; raíz cúbica o tercera; raíz de raíz o raíz quarta; raíz relata o raíz quinta; raíz sexta; raíz séptima, raíz octava, y assí discurriendo por las dignidades (Núñez 1567: f. 43r).

4. ANÁLISIS DE LAS NOTACIONES O ABREVIATURAS

El empleo de ciertas abreviaturas en textos matemáticos se justifica, a menudo, en obras tan célebres como la *Divina proportione* (1509), del matemático italiano Luca Pacioli. En esta, afirma el franciscano:

> Utilizaremos muchos y diversos caracteres y abreviaturas que se acostumbran a usar en semejantes facultades [...]. Y solo con el fin de evitar una excesiva prolijidad en la escritura, y también en la lectura, ya que de otro modo se llenaría de tinta mucho papel. Del mismo modo, también nosotros en matemáticas, para el álgebra, es decir, la práctica especulativa, usamos otros caracteres (Trad. Calatrava 1991: 40-41).

Del mismo modo, el alemán Marco Aurel (1552: f. 69r) declara el empleo de ciertas abreviaturas a lo largo de su tratado: «pónense los caracteres porque son breves y por evitar la prolixidad de escrivir tales nombres a la larga», aunque postula la posibilidad de que se empleen otras alternativas: «los que aquí porné no es de necessidad por fuerça que éstos y no otros hayan de ser, porque cada uno puede poner los que a él plazerán, o si querrá escrivir los dichos nombres a la larga, podrá hazerlo, pues no haze nada al caso».

En esta misma línea, Pérez de Moya argumenta (1562: 449):

> En este capítulo se ponen algunos characteres, dando a cada uno el nombre y valor que le conviene, los quales son inventados por causa de brevedad. Y es de saber que no es de necessidad que éstos y no otros ayan de ser, porque cada uno puede usar de los que quisiere e inventar muchos más, procediendo con la proporción que le paresciere.

Y en el capítulo tercero del libro dedicado al álgebra o regla de la cosa reconoce «algunos characteres que yo uso, por no aver en la stampa otros»:

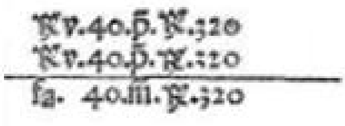
> Por los diez characteres que en el precedente capítulo se pusieron uso éstos […]. Esta figura *r.* quiere dezir *raýz quadrada*; esta figura *rr.* denota *raýz quadrada de raýz quadrada*; esta *rrr.* denota *raýz cúbica*. D'estos dos characteres p., m., notarás que la p. quiere dezir más y la m. menos; el uno es copulativo, el otro disiunctivo; sirven para summar y restar quantidades differentes, como adelante mejor entenderás. Quando después de poner *r* se pone *u*, denota *raýz quadrada universal*, y assí *rru. raýz de raýz quadrada universal*, y d'esta suerte *rrru. raýz cúbica universal* (1562: 452-453),

testimonios de los que se deduce que no son convenciones fijadas. No obstante, son abreviaturas asumidas y empleadas con asiduidad y homogeneidad por los matemáticos hispanos —tanto para la notación de las sucesivas potencias de la incógnita como para las raíces—, de acuerdo con la corriente establecida por la escuela italiana y la influencia ejercida por la *Suma* de Pacioli, la cual determinó en gran parte, según Paradis y Malet (1989: 135), «las notaciones empleadas en Italia, y en los países que culturalmente dependían de ella, hasta prácticamente 1600». De hecho, sostienen que

> la contribución más importante de la *Suma* son las notaciones. En la obra de Pacioli se da un paso adelante fundamental, desde la simple y pesada retórica de los árabes […], hacía una simbología específica de las relaciones algebraicas (1989: 135-136).

E incluso la influencia ejercida por el también matemático italiano Leonardo de Pisa[13]. Según documenta Cajori (1993: 90-91), «the first appearance of the abbreviation *R* for *radix* is in the Fibonacci's *Practica Geometriae* (1220), where one finds the *R* meaning "square root"». Por otro lado, en el *Liber Abacci* (1202), explica cómo calcular, numéricamente, raíces cuadradas y cúbicas, «siendo la primera vez que aparece en el Occidente cristiano un algoritmo para el cálculo de estas últimas» (*cfr.* Paradis-Malet 1989: 94; Cajori 1993: 123).

Este esquema será el que adopte Pacioli para el simbolismo de las raíces. En efecto, R o R2 era la síncopa que empleaba para la *raíz cuadrada*, R3 (*raíz cúbica*), RR (*raíz cuarta*), etc., y, cuando los radicandos constaban de varios términos, es decir, generaba la raíz de un polinomio, usaba la letra V o U[14] (del latín *universālis*, *DRAE*[22]) como si fuese un paréntesis, por ejemplo, RV. 7 p R 14 = $\sqrt{7+\sqrt{14}}$ o la siguiente operación:



(Pacioli 1494: f. 132v),

que, traducida a la notación simbólica actual, es:

$$\begin{array}{c} \sqrt{40+\sqrt[3]{320}} \\ \sqrt{40+\sqrt[3]{320}} \\ \hline \text{hace: } 40 - \sqrt[3]{320} \end{array}$$

[13] Más conocido como Fibonacci (hijo de Bonaccio, mercader y funcionario comercial) (Pisa, 1180-¿?, 1250). Viajó por negocios, y por placer, por toda Europa y el Cercano Oriente y fue el introductor de las cifras hindo-arábigas (Bell 2000[5]: 113). Este autor tomó como punto de referencia la obra de al-Kwārizmī, pues en su *Liber Abacci* condensó los conocimientos aritméticos y algebraicos árabes y orientales, el cual ejerció una gran influencia en la etapa pre-renacentista (Paradis-Malet 1989: 93-99).

[14] Afirman Paradis y Malet (1989: 253) que «el gran problema de la notación de los radicales (tanto con los símbolos italianos como con los alemanes) siempre fue la falta de paréntesis, es decir, la manera de distinguir *raíz de 3 más raíz de 5*, de *raíz de* (*3 más raíz de 5*). Uno de los artificios más comunes fue la V de *universalis*».

Asimismo, como puede observarse en la Figura 1, esta simbología la adopta Pérez de Moya en su *Arithmética práctica* (1562):

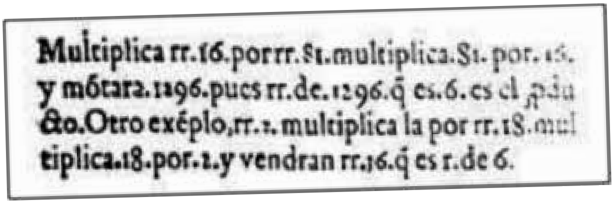

Multiplica rr.16.por rr.81.multiplica.81.por.16.
y mōtara.1296.pues rr.de.1296.q̃ es.6.es el ...
&o.Otro exẽplo,rr.2.multiplica la por rr.18.mul
tiplica.18.por.2.y vendran rr.36.q̃ es r.de 6.

Figura 1. Notaciones de *raíz de raíz* Pérez de Moya (1562: 506)

En esta expone dos operaciones o ejemplos que, en simbolismo actual, equivalen a:

a) $\sqrt[4]{16}$ x $\sqrt[4]{81}$ / 16 x 81 = 1296 / $\sqrt[4]{1296}$ = 6

b) $\sqrt[4]{2}$ x $\sqrt[4]{18}$ / 18 x 2 = $\sqrt[4]{36}$ = $\sqrt[2]{6}$

En cambio, el signo para expresar la radicación[15] √ —tal y como hoy conocemos— es de origen alemán, «aunque la fijación de la forma definitiva y la victoria final sobre la R empleada por los italianos fue más lenta [que otros símbolos, como el reemplazo de *p* y *m* por + y −][16]» (Paradis-Malet 1989: 139). Christoph Rudolff[17] en su *Die Coss* (1525) es el primer autor de un libro impreso que usa un grafismo parecido a nuestra raíz: √. Este autor no usó índices para indicar el orden de radicación, sino que acuñó los siguientes símbolos: √ para *raíz cuadrada*; √√√ *raíz cúbica*; √√ *raíz cuarta*:

15 «Euler guessed that it was a deformed letter *r*, the first letter in *radix*» (Cajori 1993: 366).

16 Las aritméticas y álgebras alemanas del s. XVI habían desplazado los símbolos *p* (abreviación del latín *plus* o del italiano *più* 'más') para la adición y *m* (abreviación del latín *mĭnŭs* 'íd.', *DECH* o del italiano *meno*) utilizados por los algebristas italianos […]. Fue Johann Widman el primero en utilizarlos en un libro impreso: una aritmética comercial, *Rechenung auff allen Kauffmanschafft*, publicada en 1489. Estos signos + y –, que se utilizaban originalmente, al parecer, según Boyer 2003[2]: 360, «para indicar exceso y defecto en las medidas de mercancías en los almacenes, terminaron por pasar a ser símbolos para representar las dos operaciones aritméticas básicas de sumar y restar».

17 Matemático germano (Silesia, 1499-Vienna, 1543), publicó el primer libro de álgebra escrito en alemán, el cual ejerció una gran influencia en la producción de otros matemáticos posteriores (Stifel, Aurel, etc.). Su contribución es relevante desde el punto de vista de la notación de las raíces y significativa por su clasificación y designación de las potencias de la incógnita.

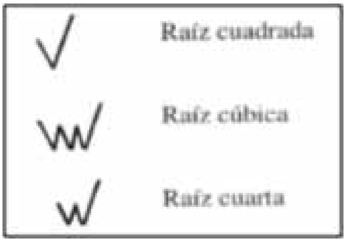
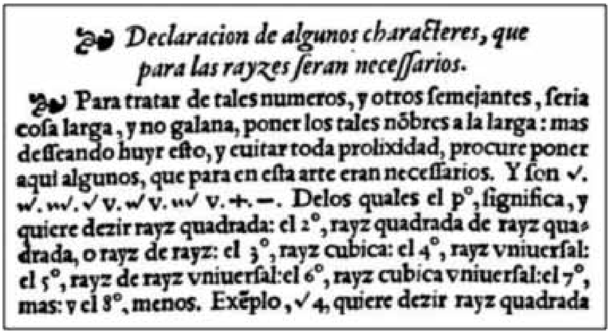


Figura 2. Notaciones de las raíces Christoph Rudolff (Meavilla 2001: 287)

Este simbolismo será usado, a su vez, por el germano Marco Aurel (1552) en la *Arithmética algebrática*:

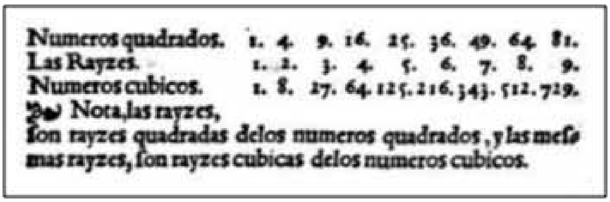


Declaracion de algunos charaćteres, que para las rayzes ſeran neceſſarios.

Para tratar de tales numeros, y otros ſemejantes, ſeria coſa larga, y no galana, poner los tales nõbres a la larga: mas deſſeando huyr eſto, y euitar toda prolixidad, procure poner aqui algunos, que para en eſta arte eran neceſſarios. Y ſon ✓. w✓. ww✓. ✓ v. w✓ v. ww✓ v. +. —. Delos quales el p°, ſignifica, y quiere dezir rayz quadrada: el 2°, rayz quadrada de rayz quadrada, o rayz de rayz: el 3°, rayz cubica: el 4°, rayz vniuerſal: el 5°, rayz de rayz vniuerſal: el 6°, rayz cubica vniuerſal: el 7°, mas: y el 8°, menos. Exẽplo, ✓4, quiere dezir rayz quadrada

Figura 3. Notaciones de las raíces Marco Aurel (1552: f. 43r)

Además, presenta una tabla con las equivalencias y valores de los números cuadrados cúbicos y de cómo se generan sus respectivas raíces:



Numeros quadrados.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.
Las Rayzes.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Numeros cubicos.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

Nota, las rayzes, ſon rayzes quadradas delos numeros quadrados, y las meſmas rayzes, ſon rayzes cubicas delos numeros cubicos.

Figura 4. Tabla con valores de *raíz cuadrada* y *cúbica*
Marco Aurel (1552: f. 41r)

Por otro lado, en el *Libro de Álgebra* de Pedro Núñez se propone una notación interesante para las raíces, a pesar de que en 1567, tal y como exponen Paradis y Malet (1989: 253), «ya no tenía virtualmente posibilidades de triunfar para la alemana». Las *raíces cuadradas*, *cúbicas*, *cuartas*, *quintas* son escritas: 2R, 3R, 4R, 5R, etc. Así lo demuestra el siguiente ejemplo de *raíz cuadrada* como 2R, actualmente $\sqrt[2]{\ }$:

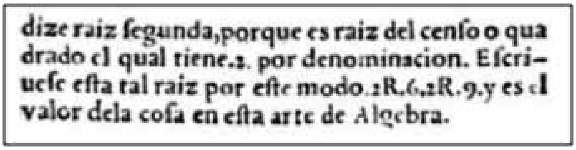
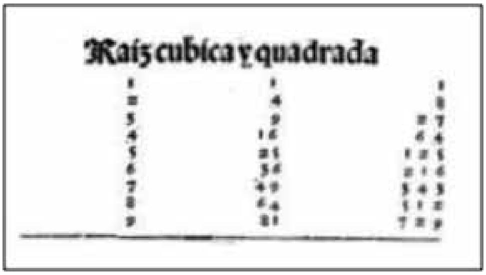

dize raiz ſegunda,porque es raiz del cenſo o qua
drado el qual tiene.2. por denominacion. Eſcri-
ueſe eſta tal raiz por eſte modo.2R.6.2R.9.y es el
valor dela coſa en eſta arte de Algebra.

Figura 5. Notación de *raíz cuadrada* Núñez Salaciense (1567: f. 44r)

Finalmente, Ortega, que se centra en la tipología de las *raíces cuadrada* y *cúbica* (estudiadas en los subapartados 3.2. y 3.3.), no presenta notación ni síncopa o abreviatura alguna en su *Conpusición de la arte de la Arismética* (1512). En este sentido, su obra, publicada tempranamente, significa un retroceso con respecto a las álgebras italianas. Sin embargo, por otro lado, simplifica y muestra una regla general basada en el principio de multiplicación por el cual se generan las distintas raíces:

> Por quitar toda prolegidad, quiérote dar esta regla general: que siempre has de doblar[18] todas las letras de las órdenes de que has sacado la raíz y, quando ansí las doblares, siempre has de buscar una figura que, multiplicada por sí mesma y por el doblo de las figuras debaxo de la raya escritas, pueda montar tanto quanto monta el valor de aquella orden que quieres sacar la raíz y de las otras letras, si ovieren sobrando d'encima de las otras órdenes. Y, después que las ovieres multiplicado, toda aquella multiplicación quitalla has de las figuras de las órdenes pasadas. Y ansí yrás fasta que acabes de sacar la raíz de todas las órdenes de las sumas que quieres sacar de raíz. Y aquí has de saber que quanto montare en las que están debaxo de la raya asentada, tanto será la raíz de toda aquella suma que querías saber su raíz (1512: f. 27v),

característica que ilustra mediante la siguiente tabla:


Raíz cubica y quadrada

1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Figura 6. Tabla con valores de *raíz cuadrada* y *cúbica*
Juan de Ortega (1512: f. 33v)

18 A propósito del concepto *doblar* para expresar la multiplicación en los textos matemáticos del Renacimiento, léase Mancho Duque-Molina Sangüesa (2013).

Además de las obras de referencia —italianas o alemanas— revisadas, destacamos una francesa: la *Triparty* (1484) de Chuquet[19], pues la segunda parte de la misma está dedicada al cálculo con radicales, es decir, al estudio de las raíces y números compuestos de diferentes raíces. En esta se estudian las que el autor denomina como *raíz* y *raíces segundas*, *terceras*, *cuartas*, y así indefinidamente. En cuanto a las notaciones, por ejemplo, para la *raíz segunda* utiliza la siguiente síncopa: R^2, «R^2 de 16 es 4» y añade: «tales raíces para los antiguos son denominadas *raíces cuadradas*» (1484: 655). Sin embargo, cuando los radicandos constaban de varios términos, en lugar de usar la letra V o U, como si fuese un paréntesis, por ejemplo, RV. 7 p R 14 = $\sqrt{7+\sqrt{14}}$, Chuquet lo remarcaba subrayando los términos: $R^2\ \underline{7\ p\ R^2\,14}$.

Puede observarse, por la forma de la notación y por el abandono de la tradicional nomenclatura (*cuadradas*, *cúbicas*, etc.) de los antiguos, como Chuquet «ya apunta a una teoría de raíces de índice[20] cualquiera, independizada de toda interpretación geométrica, y analizada bajo la óptica del cálculo y de las reglas de operatividad aritméticas» (Paradis-Malet 1989: 158). En consecuencia, acierta en la adopción de un tipo de notación muy útil y eficaz, que en Europa todavía tardará mucho en imponerse. Así, generaliza la notación de las diferentes clases de raíces de la forma más natural: «R^3 64 es 4 [ya que 4 por 4 por 4 dan 64]». Para la notación exponencial de las raíces se sirvió de los símbolos o abreviaturas: R^2, R^3, R^4, R^5,… (letra inicial del francés *racine* 'raíz', según *Trésor de la Langue Française informatisé*, *TLFi*).

Esta obra, afirman Paradis y Malet (1989: 175), no se valora suficientemente, ya que encierra en sí aspectos tan importantes como «la creación de un modelo de lenguaje algebraico, completamente independizado de la geometría y capaz de funcionar por sí solo el tratamiento general del cálculo radical». En este sentido, argumenta Cajori (1993: 100), «on this subject Chuquet was about one hundred and fifty years ahead of his time; had his work been printed at the time when it was written, it would, no doubt, have greatly accelerated the progress of algebra». De hecho, certifican Paradis y Malet (1989: 145) que «una simple ojeada a esta obra nos revela que una nueva manera de hacer matemáticas se ha inaugurado».

---

19 Este parisino, bachiller en Medicina y aficionado a las matemáticas, confeccionó una obra, *Le Triparty en la science de les nombres*, que, según certifican Paradis y Malet (1989: 145), «es, sin ningún tipo de duda, la composición más original y audaz que se llegó a elaborar desde la época de oro griega […]. Con Nicolás Chuquet el renacimiento matemático se ha iniciado». Lamentablemente, esta no llegó a ser impresa hasta el año 1881, motivo por el que sus teorías circularon de una forma vaga e imprecisa en obras de otros matemáticos, como Étienne de La Roche (1781-1813).

20 «Chuquet elaborates the exponential notation to a completeness apparently never before dremed of» (Cajori 1993: 100).

5. CONCLUSIONES

En primer lugar, en el análisis de las *raíces* hemos constatado que, al menos, una parte de estas designaciones están documentadas en los repertorios lexicográficos consultados: *raíz*, *raíz cuadrada* y *raíz cúbica*. Por el contrario, sus sinónimos: *raíz segunda* y *raíz tercera*, no se registran en ninguno de los diccionarios revisados, ni siquiera en los específicos, por lo que presentan en estos textos, probablemente, su primera documentación. Finalmente, hallamos otros compuestos: *raíz cuba* y *raíz relata*, acuñados por los algebristas del Quattrocento italiano, ya documentados en la *Suma* de Pacioli, por tanto, herederos de esta corriente algebraica.

Para su definición, hemos recurrido al patrón confeccionado por el *DRAE*[22] para el término *raíz*, esto es, «cantidad que se ha de multiplicar por sí misma X veces para obtener un número determinado» en todo el paradigma, que designa hasta 6 posibles raíces.

Por lo que respecta a la etimología de estos vocablos, hemos comprobado que son preferentemente de origen latino, entre otros: *raíz*, *cuadrado* y *cubo*. En este sentido, destacan las connotaciones geométricas para la designación de la nomenclatura referida a las *raíces* —las cuales, a su vez, dan lugar a la creación de toda una red o familia léxica correspondiente: *cuadrado* > *cuadradamente*; *cúbico* > *cúbicamente*, *cúbico* > *cubicar* > *cubicado*, que trataremos con detenimiento en un estudio posterior, así como la diversidad en la tipología de las raíces (*raíz universal*, *raíz ligada*, *raíz numérica*, *raíz dable*, etc.)—; este influjo es el testimonio o legado que aún perdura, consecuencia directa de las imbricaciones tradicionales entre álgebra y geometría. No obstante, por otro lado, la aritmética también desempeña un papel esencial en la creación del paradigma estudiado, ya que se emplea la serie de los numerales ordinales que indican una sucesión ordenada, en este caso, de *raíces* con distinto valor, que va en aumento o *in crescendo*: *raíz segunda*, *raíz tercera*, *raíz cuarta*, *raíz quinta*, *raíz sexta*, etc.), para designar los radicales superiores a $\sqrt[3]{\ }$.

Asimismo, tal y como hemos testimoniado en los ejemplos, y de acuerdo con la afirmación de Núñez Salaciense (1567: f. 25v), hemos comprobado que «toda dignidad multiplicada en sý engendra otra de doblada denominación». Esto explica la aparición de los compuestos: *raíz de raíz* o su sinónimo *raíz cuadrada de raíz cuadrada*, mecanismo en el que las 2 dignidades elementales: *raíz* y *raíz cuadrada*, sirven de núcleo o base, pues, mediante su reduplicación o yuxtaposición, se generan raíces con radicales más elevados o cuantitativamente superiores.

En síntesis, corroboramos la existencia, en los textos matemáticos del siglo XVI, de un panorama designativo más rico, compuesto de formas hoy extintas: *raíz* *segunda*, *raíz tercera*, *raíz* (*cuadrada*) *de raíz* (*cuadrada*) y *raíz relata vs*. formas mantenidas: *raíz cuadrada*, *raíz cúbica*, *raíz cuarta*, *raíz quinta*, *raíz sexta*.

En cuanto al análisis de las abreviaturas o notaciones empleadas, se comprueba que cada autor presenta una serie de tendencias o filiaciones[21]. Por ejemplo, Marco Aurel, de origen germánico e introductor del álgebra en España, emplea en su tratado publicado en Valencia en 1552 tanto la nomenclatura como las síncopas o abreviaturas diseñadas por Cristoph Rudolff, el matemático alemán más destacado e influyente. Por el contrario, el andaluz Pérez de Moya se decanta por el uso de las síncopas acuñadas y empleadas, fundamentalmente, por Luca Pacioli. En contraposición, el portugués Núñez Salaciense sigue el esquema designativo establecido por los italianos, pero conjugado con otro propio —en el que al núcleo *raíz* se le adosa un numeral ordinal correspondiente al grado del radical (*raíz segunda*, *tercera*, etc.)—. De este modo, confecciona Núñez un análisis más completo y exhaustivo, al ser el único matemático de la centuria que trata, entre otras, *raíz quinta* y *raíz sexta*. Sin embargo, en lo que respecta al uso de las notaciones o síncopas para expresar dichas raíces se desliga, el portugués, de la corriente establecida por los algebristas italianos e innova (*cfr*. 4.). Finalmente, Juan de Ortega es, por un lado, más limitado pero, por otro, más pormenorizado en su análisis, exposición y divulgación de las *raíces*, ya que estudia con detenimiento la tipología y naturaleza de la *raíz cuadrada* y *raíz cúbica*.

En suma, se puede admitir que la aportación más interesante y revolucionaría es —al margen de la realizada por Chuquet— la de Núñez, pues esta presenta, tanto desde el punto de vista léxico como desde el de las abreviaturas, una propuesta interesante, aunque, lamentablemente, en algunos aspectos infructuosa.

Las abreviaturas estudiadas están constituidas, en esencia, por la letra inicial: R (del latín RĀDIX, y de ahí al español *raíz*, italiano *radice* o francés *racine*), cuya variabilidad es el empleo o no de superíndices *vs*. reduplicaciones; salvo la síncopa o signo alemán acuñado por Rudolff, que es el que origina el símbolo que hoy pervive: √.

En líneas generales, se puede afirmar que nos hallamos ante una «economía simbólica» o de «grafismos aceptados por convención» (Paradis-Malet 1989: 84), imprescindibles en el desarrollo y evolución del álgebra en la península ibérica a lo largo del Quinientos.

En efecto, estas características analizadas ponen de manifiesto la importancia de los referentes, de la herencia cultural y del bagaje de conocimientos de las técnicas

---

21 Este aspecto ratifica la tesis expuesta por Russo (1959: 194-195), según la cual «les simboles mathématiques, au XVI^e siècle, varient sensiblement avec les auteurs».

algebraicas anteriores a la creación del álgebra simbólica, marcada por la tradición de la geometría euclidiana que desembocará en un lenguaje preferentemente simbólico, en el que los radicales y las ecuaciones, entre otros, triunfan sobre las líneas, superficies y figuras, cuyo paso intermedio, semiverbal y semisimbólico al mismo tiempo, hemos mostrado.

En conclusión, de acuerdo con Mancho Duque (*cfr*. 2007), «se constata un giro en el método de exposición matemático», que avanza de la retórica elemental a la madurez simbólica, es decir, de la *palabra* al *símbolo*. En este transcurso la producción científica del Renacimiento —caracterizada por la proliferación de abreviaturas para la notación de ciertos conceptos algebraicos— contribuirá en gran medida tanto a la abstracción y perfeccionamiento del álgebra como a la independización y consolidación de esta rama de las matemáticas[22].

BIBLIOGRAFÍA

Fuentes primarias

Aurel, Marco (1552): *Libro primero de Arithmética algebrática*. Valencia: Joán de Mey.

Chuquet, Nicolás (1484): *Le Triparty en la science de les nombres*. Lyon.

Núñez Salaciense, Pedro (1567): *Libro de Álgebra en Arithmética y Geometría*. Anvers: Herederos de Arnoldo Birckman.

Ortega, Juan de (1512): *Conpusición de la arte de la Arismética y de Geometría*. Lyon: Maistro Nicolau de Benedictis (por Joannes Trinxer).

Pacioli, Luca (1494): *Suma de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*. Venezia: Paganino Paganini.

Pacioli, Luca (1509): *De divina proportione* [trad. y ed. Juan Calatrava] (1991): *La divina proporción.* Madrid: Akal.

Pisa, Leonardo (1202) [manuscrito]: *Liber Abacci*.

Pisa, Leonardo (1220) [manuscrito]: *Practica Geometriae*.

22 Y todo lo que ello conlleva en el desarrollo de otras disciplinas y del razonamiento matemático en general, pues afirma Bell (2000[5]: 132) que «si no se hubiera transformado el álgebra elemental en una ciencia puramente simbólica a fines del siglo XVI, parece poco probable que la geometría analítica, el cálculo diferencial e integral, la teoría de probabilidades, la teoría de números y la dinámica pudieran haber arraigado y florecido, así como fue el caso, en el siglo XVII» e incluso llega a admitir que «la perfección del simbolismo algebraico fue una de las cosas que más contribuyó a la velocidad sin precedentes con que se desarrollaron las matemáticas».

Pérez de Moya, Juan (1562): *Arithmética práctica y speculativa*. Salamanca: Mathías Gast.
Rudolff, Christoph (1525): *Behend unnd Hübsch Rechnung Durch die Kunstreichen Regeln Algebea, so Gemeincklich die Coss Genennt Werden*. Staβburg.

Estudios

Bell, Eric Temple (2000[5]) [Traduc. R. Ortiz]: *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.
Bentley, Peter J. (2008): *El libro de las cifras: el secreto de los números*. Barcelona: Paidós.
Boyer, Carl B. (2003[2]) [Traduc. M. Martínez Pérez]: *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.
Cajori, Florian (1993): *A History of Mathematical Notations*. La Salle (Illinois): Open Court Publishing Co., reprinted by Dover.
Corominas, Joan-José Antonio Pascual (1980-1991): *Diccionario Crítico Etimológico Castellano e Hispánico*. Madrid: Gredos.
Corominas, Joan-José Antonio Pascual (2012): *Diccionario Crítico Etimológico Castellano e Hispánico. Edición en CD-ROM*. Madrid: Gredos.
Etayo Miqueo, José Javier (1986): «El álgebra del cinquecento», in *Historia de la Matemática hasta el siglo XVII*. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, pp. 147-169.
Flórez Miguel, Cirilo (2006): «Ciencias, siglos XV-XVII», in Luis E. Rodríguez-San Pedro Bezares (coord.): *Historia de la Universidad de Salamanca*, vol. III, *Saberes y confluencias*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca, pp. 409-433.
Giusti, Enrico-Maccagni, Carlo (1994): *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento*. Firenze: Editorial Giunti.
Glare, Peter G. W. (1968-1982): *Oxford Latin Dictionary*. Oxford: Clarendon Press.
Leal y Leal, Luis (1971-1972): «El Bachiller Juan Pérez de Moya», *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses* 70-71, pp. 17-36.
Mancho Duque, Mª. Jesús (2007): «Oriente y occidente en el léxico de las matemáticas del Quinientos», in Mar Campos, Rosalía Cotelo y José Ignacio Pérez Pascual (eds.): *Historia del léxico español*, Anexos *Revista de Lexicografía* 5, pp. 97-107.
Mancho Duque, Mª. Jesús (2010): «Sobre la tipología de los números en textos matemáticos del Renacimiento: aspectos neológicos», in Antonia Mª. Medina

Guerra y Marta Concepción Ayala Castro (eds.): *Los diccionarios a través de la historia*. Málaga: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Málaga, pp. 371-393.

Mancho Duque, Mª Jesús (dir.) (2014): *Diccionario de la Ciencia y de la Técnica del Renacimiento* (*DICTER*). [En línea]: <http://dicter.eusal.es> [Consulta: 05/01/2014].

Mancho Duque (dir.) Mª. Jesús-Quirós, Mariano (coord.) (2005): *La ciencia y la técnica en la época de Cervantes: textos e imágenes*, CD. Salamanca: Publicaciones Universidad.

Mancho Duque, Mª. Jesús-Molina Sangüesa, Itziar (2013): «*Doblar* frente a *multiplicar*: el testimonio de una alternancia designativa en textos matemáticos del Renacimiento», in Gloria Clavería, Cecilio Garriga, Carolina Julià, Francesc Rodríguez y Joan Torruella (eds.): *Historia, lengua y ciencia: una red de relaciones*. Frankfurt am Main: Peter Lang, pp. 185-196.

Maracchia, Silvio (2008[2]): *Storia dell'Algebra*. Napoli: Liguori.

Martín Casalderrey, Francisco (2000): *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. Madrid: Nivola.

Massa Esteve, Mª. Rosa (2010): «Àlgebra i Geometría al *Libro de Álgebra en Arithmética y Geometría* (1567) de Pedro Núñez», *Quaderns d'Història de l'Enginyeria* XI, pp. 101-129.

Meavilla Seguí, Vicente (2001): *Aspectos históricos de las matemáticas elementales*. Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza.

Molina Sangüesa, Itziar (2015): «Tradición e innovación en el ámbito de la divulgación matemática de Quinientos», in Jenny Brumme y Carmen López Ferrero (eds.): *La ciencia como diálogo entre teorías, textos y lenguas*. Berlin: Frank & Timme, pp. 31-48.

Nesselman, Georg Heinrich Ferdinand (1842): *Versucheiner Kritischen Geschichte der Algebra*, *1. Teil. Die Algebra der Griechen*. Berlin: G. Reimer.

Paradis, Jaume-Malet, Antoni (1989): *Los orígenes del álgebra: de los árabes al Renacimiento*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias (PPU).

Picatoste y Rodríguez, Felipe (1891): *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI*. Madrid: Imprenta y Fundación Manuel Tello.

Real Academia Española (2001[22]): *Diccionario de la lengua española*. Madrid: Espasa Calpe. En línea: <http://buscon.rae.es/diccionario/drae.htm> [Consulta: 01/12/ 2013].

Rey Pastor, Julio (1926): *Los matemáticos españoles del siglo XVI*. Madrid: Biblioteca Scientia.

Russo, Filippo (1959): «La constitution de l'algèbre au XVIe siècle. Étude de la structure d'une évolution», *Revue d'histoire des sciences et leur applications* 12,3, pp. 193-208. http://dx.doi.org/10.3406/rhs.1959.3753

Sousa, Manuel Ventura (1985): *Vida e Obra de Pedro Nunes*. Lisboa: Instituto de Cultura e Língua Portuguesa, Ministério da Educação.

TLFi = Trésor de la Langue Française informatisé. [En línea]: <http://atilf.atilf.fr/tlf.html> [Consulta: 22/01/2014].

Valladares Reguero, Aurelio (1997): «El Bachiller Juan Pérez de Moya: Apuntes bio-bibliográficos», *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses* 165, pp. 371-412.

Vera, Francisco (1991) [Ed. Juan Cobos Bueno]: *La matemática en el Occidente latino medieval*. Badajoz: Publicaciones de la Diputación de Badajoz.

Vernet, Juan (1978): *La cultura hispanoárabe en Oriente y Occidente*. Barcelona: Ariel.

Vernet, Juan (2006²): *Lo que Europa debe al Islam de España*. Barcelona: Acantilado.