REFLEXIÓN SOBRE INVESTIGAR, LA LÓGICA BORROSA Y SUS APLICACIONES[1]

Enric Trillas[2]
Universidad de Oviedo
http://dx.doi.org/10.15304/ag.37.2.5023

I. Introducción

De la lógica borrosa trataré, únicamente, dos temas que me parecen relevantes para quienes la estudien, investiguen, o la quieran aplicar. Ambos tienen que ver con un añadido que me gusta agregar a la conocida afirmación de su creador, Lotfi A. Zadeh, 'Fuzzy logic is a matter of degree', alargándola hasta 'But in praxis fuzzy logic is not only a matter of degree but also of design', remarcando así la diferencia con metodologías de tipo más formal[3] y no dependientes del contexto, como es el caso de la lógica borrosa la cual, pese a la palabra 'lógica', no puede estudiarse por vías simplemente formales. Como la física se refiere a materia y energía, la lógica borrosa lo hace al lenguaje y el razonamiento ordinarios y uno de sus principales objetivos es la modelización matemática y computacional de sistemas descritos

---

[1] Texto (ampliado) de la conferencia invitada en la 'Summer School of Fuzzy Logic' (Universidad de Santiago de Compostela, Julio 17- 21, 2017) e impartida bajo el título "What the practitioner of Fuzzy Logic should not avoid".

[2] Doctor Honoris Causa por la Universidad Pública de Navarra (UPN) y por la Universidade de Santiago de Compostela (USC), Profesor Emérito de la Universidad de Oviedo.

[3] E. Trillas, L. Eciolaza, 2015, Fuzzy Logic: An Introductory Course for Engineering Students. Springer.

lingüísticamente con la intervención de palabras imprecisas; para ello, el arte de diseñarlos es, como en toda la ingeniería, esencial.

Consideraré los conceptos de conjunto borroso y de enunciado condicional como una parte de cuanto, en más de cuarenta años dedicados a la lógica borrosa, he podido observar que muestra sombras conceptuales que, incluso, pueden llevar a diseñar mal un sistema. Ninguno de los dos puede darse por cerrado y, como se mostrará, en ambos existen cuestiones aún abiertas que les otorgan un interés que va más allá de su simple descripción.

I.1. Recuerdo cuando un ingeniero, amigo, colega y notable investigador acudió a mí para contarme, bien preocupado, que el problema que le ocupaba requería, a la vez, una ley distributiva y que la conjunción se representase por la t-norma 'producto', pero que, al exigir esa ley distributiva que la conjunción fuese el mínimo, se encontraba con una dificultad que le hacía sospechar que estaba cometiendo un error de modelización. Un poco de pizarra bastó para deshacer el entuerto: la ley distributiva requerida era la $\mu \cdot (\alpha + \beta) = \mu \cdot \alpha + \mu \cdot \beta$, que sólo obliga a que la disyunción (+) sea la t-conorma máximo y acepta cualquier t-norma como conjunción (·), el producto en particular. Mi colega lo ignoraba ya que muchos textos contemplan las dos leyes distributivas conjuntamente y la que obliga a tomar al mínimo como conjunción es la $\mu + \alpha \cdot \beta = (\mu + \alpha) \cdot (\mu + \beta)$ que, por su parte, vale con cualquier t-conorma representando la disyunción. El problema no residía ni en la modelización, ni en el planteamiento del problema, sino en la elección del operador representando la conjunción lingüística; sólo provenía de una simple laguna de conocimiento teórico. ¿Cuántos errores al diseñar sistemas descritos lingüísticamente habrán cometido gentes menos preparadas a causa de desconocimientos teóricos? Muchos de quienes aplican la lógica borrosa no han cursado ni siquiera un semestre dedicado a sus fundamentos teóricos y se limitan a emplear algún 'tool book' para ello y el cual sólo permite trabajar con aquello que permite su sistema computacional.

Trataré unas cuestiones que, en mi opinión, afectan tanto a la comprensión teórica de la lógica borrosa, como al diseño de los sistemas borrosos y que, además, pueden ser interesantes para la filosofía de la ciencia y la tecnología. Sin embargo y antes de empezar, deseo comentar brevemente tres aspectos de distinta naturaleza que, envolviendo aquellas cuestiones y afectándolas, creo relevantes.

I.2. El primero y que me parece ligado con lo que seguirá, es que no creo en la viabilidad de la universidad como una escuela profesional o, si se quiere, de formación de profesionales para cualquier mundo, el tecnológico en particular; de ahí vienen, en gran parte, las carencias que se observan en quienes diseñan sistemas borrosos al no haber cursado, la mayoría, ni un semestre de lógica borrosa teórica especialmente pensado para ellos y no para matemáticos[4]. Nunca una universidad pública de tipo profesional podrá competir con iniciativas de las que, en la web, ya hay ejemplos que no harán sino aumentar a menos que el aprendizaje universitario se base en métodos distintos a los actuales, tan asentados aún en la (medieval) lección magistral.

Necesitamos una universidad pública en la cual, en lugar de unos que 'crean' que enseñan y otros que 'esperen' aprender, aprendan todos conjuntamente, con gran dedicación personal, metodologías activas y, sobre todo, críticas, basadas en los últimos conocimientos e impartidas por profesores que investiguen en ellas y no se limiten a 'repetir' lo hecho por otros; es decir, yendo al fondo de las cosas, huyendo de 'recetas prácticas' y, por lo menos en el máster, empleando el inglés como el actual idioma usual de la ciencia y la tecnología.

I.3. El segundo, que también veo ligado con lo que seguirá, es que no creo en el investigador que no manifieste pasión por su trabajo, que no lo tenga por el primer objetivo de su vida, que no lo viva de manera apasionada, lejos de trabajos rutinarios, y no lo entienda como el primero de sus intereses personales. Como la gran aventura de su vida.

En el caso de la lógica borrosa, ello implica tenerla como el centro de sus investigaciones, poniendo a su servicio cuantas teorías y técnicas logre dominar. En particular, no se trata de obtener resultados de interés puramente matemático, sino modelos matemáticos de los problemas de la lógica borrosa y no modelos matemáticos a la busca de problemas de esa lógica; lo primero y si se lo aceptan, debe presentarlo a congresos o revistas matemáticas, lo segundo es aquello que es admisible presentar a los de lógica borrosa. Para tener un sustrato teórico, la lógica borrosa requiere, como todo lo científico, adecuados modelos matemáticos o computacionales que permitan tanto avanzar su conocimiento, como aplicarla prácticamente.

Por mi parte, he podido emplear, para saber de la validez de las clásicas formas aristotélicas en la lógica borrosa, cuanto había aprendido acerca de

[4] E. Trillas, L. Eciolaza, 2015, Fuzzy Logic: An Introductory Course for Engineering Students. Springer. E.H. Mamdani, E. Trillas, 2012, 'Correspondence between an experimentalist and a theoretician'. Combining Experimentation and Theory (Eds. E. Trillas *et altri*): 1-18, Springer.

las ecuaciones funcionales en mis anteriores estudios de los espacios métricos probabilísticos[5]. Por ejemplo, cuando con Claudi Alsina y a lo largo de ese estudio, dimos con una ecuación funcional nueva y difícil, publicamos su solución en un libro sobre ecuaciones funcionales[6] (donde la lógica borrosa no interesaba) y lo que afectaba al campo borroso lo publicamos en una de las revistas internacionales dedicadas a la lógica borrosa[7], remitiendo al lector a aquel libro por si quería conocer los detalles, puramente matemáticos, de la solución.

I.4. En cuanto al tercero y último, se dice, de forma muy simplificada pero no errónea, que en los procesos de investigación se invierte dinero para obtener nuevo conocimiento, en tanto que en los de innovación se invierte conocimiento ya adquirido para obtener dinero. Por discutible que sea, es una visión típica del punto de vista político y económico que, de caer en ella por completo, provoca que se acabe confundiendo investigación con innovación y con el añadido de pretender que la diferencia entre dinero-invertido y dinero-ganado sea no sólo positiva sino grande, lo que no sólo me parece discutible sino con lo cual puede aflorar el temible problema de la ambición económica personal. Con ello, se da comienzo a una mercantilización de la investigación y de la universidad o centro de investigación correspondiente que no hace sino desacreditar lo que debe ser, en las conocidas palabras de Miguel de Unamuno, el 'templo de la inteligencia'; un templo en el cual y entonces la sabiduría se substituye por la gestión y la burocracia. Para mí, lo realmente importante es la adquisición de nuevo conocimiento, sea científico o tecnológico; lo demás no me parece que vaya a favor de la bella idea, que comparto, del ya desaparecido matemático francés Jean Dieudonné y según la cual el conocimiento debe perseguirse, simplemente, por el 'honor del espíritu humano'.

Nadie entienda, sin embargo, que estoy en contra de la innovación o la investigación aplicada; al contrario, pero entiendo que la primera es mayormente cosa de las empresas las cuales y sin tecnología propia son, realmente y por lo menos económica y socialmente, 'inseguras'. La tecnología propia

[5] E. Trillas, 2017, On the Logos: A Naïve View on Ordinary Reasoning and Fuzzy Logic. Springer.

[6] C. Alsina, E. Trillas, 2002, 'On the functional equation $S_1 (x, y) = S_2 (x, T (N (x), y)$'; Z. Daroczy, Z. Pales (Eds.), Functional Equations: Results and Advances: 323-334. Springer.

[7] E. Trillas, C. Alsina, 2001, 'Elkan's Theoretical Argument, Reconsidered'; Int. Jour, Approx. Reasoning, 26: 146-152.

es la riqueza real de las empresas que, si bien des-localizan fácilmente la producción, muy raramente lo hacen con la innovación y la investigación aplicada a sus intereses. Por otra parte, la excesiva dedicación a ello de la universidad y los centros de I+D también implica que las empresas no creen empleo de calidad investigadora para investigadores bien formados; los que contratan, sólo suelen ascender a base de pasarse a la gestión. Con ello, no se dan (aparte de un cierto nivel de competencia desleal con respecto a empleos y salarios) sino simulacros de creación de tecnología de la cual poca va, realmente, a parar a los mercados manteniéndose competitiva en ellos e incorporada a productos o procesos de importancia industrial.

Es por ello por lo que prefiero contemplar a los investigadores como artesanos, buscando el conocimiento científico o tecnológico por sí mismo y 'aprendiendo el oficio en el taller de un artesano renombrado'; me gusta pensar en el cuento del artesano chino que empezó a hacer campanillas de plata para ser famoso y ganar dinero pero que, al final de su vida y cuando ya sólo quiso hacer las campanillas de plata más bonitas y con el sonido más puro, lo logró.

I.5. Un buen investigador debe dudar de todo lo establecido como doctrina en su campo; debe ser un 'rebelde' que luche creativamente contra los 'grandes' de su campo y a quienes, sin embargo, debe 'acercarse' intelectual y físicamente para aprender de ellos; de lo contrario podrá alcanzar posición y hasta dinero, pero no pasará a la historia como un investigador relevante por más comités a los que pertenezca; su memoria tardará poco en desaparecer tras su jubilación, no habrá pasado de la mediocridad. Como Cajal lo hizo con relevantes aportaciones al conocimiento que luego llevaron a importantes aplicaciones; como lo hizo Marie Curie al encontrar los entonces nuevos polonio y radio, con tantas aplicaciones posteriores del segundo y que ella se negó a patentar; como lo hicieron quienes en el primer cuarto del siglo XX investigaron la física cuántica, que tantas aplicaciones ha permitido y sigue permitiendo.

Poco hay en el mundo del conocimiento más útil que la 'inútil' investigación basada en la observación, la experimentación controlada y los modelos matemáticos. Las exigencias del mercado suelen ser inmediatas y, a la vez, con frecuencia efímeras. Sin creatividad no hay investigación real y, para ello, siguen vigentes las palabras del premio Nobel Isaac Rabi sobre la necesidad de hacer continuamente 'buenas' preguntas, es decir, aquellas capaces de llevar a respuestas fértiles. Al fin, por ejemplo y en palabras de

Abe Mamdani, introductor del control borroso, los éxitos innegables de las aplicaciones de la lógica borrosa al control de máquinas no la justifican[8].

II. El concepto de conjunto borroso

II.1. De forma abusiva, suele confundirse un (sub)conjunto borroso de etiqueta lingüística P en un universo del discurso X, con una de sus funciones de pertenencia μ_P: X $\rightarrow$[0, 1] cuando, de los conjuntos borrosos, no se sabe bien qué tipo de entidades son al no conocerse ningún criterio de identidad que los individúe. Al identificarlos con una función de pertenencia expresando los 'grados' μ_P (x) de los enunciados 'x es P', con su identidad funcional punto a punto, cada predicado P originaría en X una multitud de conjuntos borrosos sin que exista evidencia de ello en el lenguaje natural, que está en la base de la llamada lógica borrosa y a la cual preferiría conocer, por largo que sea, como 'la ciencia de la imprecisión lingüística y la incertidumbre no aleatoria'. La lógica borrosa actual es una visión formal que deja lagunas que hacen razonable repensar aspectos como es, por ejemplo, qué representa una función μ_P; conocer qué nos muestra realmente μ_P del correspondiente conjunto borroso.

Una forma de intentar explicarlo es partir de que P genera una pseudoentidad (ciertamente nebulosa, pero ¡las nubes existen!) llamada el 'colectivo lingüístico de los P'[9], como es, por ejemplo, si P = joven y X = habitantes de Galicia, 'los jóvenes gallegos', o si P = pequeño en X = [0, 100], 'los números pequeños entre 0 y 100'; tales colectivos lingüísticos están, por lo menos, bien anclados en el lenguaje, los reconocemos y los empleamos en el habla. Por más que sea fácil contra-argumentar que así no se hace sino cambiar 'conjunto borroso' por 'colectivo lingüístico', conviene añadir que, en un ámbito que no es puramente formal[10], algo empíricamente observable debe tomarse como punto inicial y que lo significativo es no sólo explicar qué representa μ_P más allá de ser una función[11], sino ligarlo con esa

[8] E.H. Mamdani, E. Trillas, 2012, 'Correspondence between an experimentalist and a theoretician'. Combining Experimentation and Theory (Eds. E. Trillas *et altri*): 1-18, Springer.

[9] E. Trillas, C. Moraga, S. Termini, 2016, 'A naïve way of looking at fuzzy sets'; Fuzzy Sets and Systems, 292: 380-395.

[10] E.H. Mamdani, E. Trillas, 2012, 'Correspondence between an experimentalist and a theoretician'. Combining Experimentation and Theory (Eds. E. Trillas *et altri*): 1-18, Springer.

[11] E. Trillas, C. Moraga, S. Termini, 2016, 'A naïve way of looking at fuzzy sets'; Fuzzy Sets and Systems, 292: 380-395.

especificación, con su diseño, y, así, poder ver al colectivo o conjunto borroso bajo una nueva luz. El significado de las palabras depende fuertemente del contexto y del propósito con el que se usan y el colectivo lingüístico generado por P en X sólo es un conjunto cuando el significado de P en X es preciso; pero las palabras imprecisas permean el lenguaje y los colectivos que generan no pueden ser conjuntos. Por ello, los conjuntos borrosos, que dependen del contexto y del propósito, son indispensables para representar conocimiento expresado en lenguaje ordinario.

II.2. Zadeh suele indicar que la función de pertenencia muestra el significado extensional de la palabras o etiqueta lingüística que genera el conjunto borroso, algo que requiere parar mientes en los conceptos de significado y de extensión que no son, precisamente, conceptos a confundir; el primero es de tipo cualitativo y el segundo cuantitativo. Sabemos, por ejemplo, qué significa 'alto' en una población; lo sabemos al poder reconocer que 'Juan es menos alto que Pedro', o que 'Juan es igualmente alto que Manuel'; es decir, lo sabemos gracias a reconocer la relación empírica 'menos P que' ($<_P$) en el universo X de discurso al cual se aplica P. Caso de que el uso de P en X sea preciso, entonces sólo reconocemos la relación 'igualmente P que' ($=_P$) y, en ambos casos, reconocemos la relación inversa 'más P que' ($<_P^{-1}$) y la opuesta 'distintamente P que'($\neq_P$). Son los casos, por ejemplo y respectivamente, de 'Pedro es más alto que Juan' y '5 es igualmente primo que 11'.

Así pues, el problema es de base empírica, reconocemos el significado gracias al grafo (X, $<_P$) si P es impreciso, y al (X, $=_P$) si P es preciso; unos grafos que representan el significado cualitativo de P en X y que, incluso, podría decirse que 'definen' lo que es un predicado impreciso y uno preciso, respectivamente. Nótese que en el caso preciso la relación $<_P$ colapsa en la $=_P$, un significado cualitativo que es el menor posible de P en X.

II.3. La siguiente cuestión se refiere al 'tamaño' o 'extensión' del significado cualitativo (X, $<_P$), lo cual requiere medirlo. Una medida de cuán P son los x de X (sólo reconocible a través de los enunciados elementales 'x es P') es una función m_P : X à[0, 1], tal que:

1) $x <_P y \Rightarrow m_P(x) \leq m_P(y)$;
2) Si z es maximal en el grafo, $m_P(z)=1$;
3) Si z es minimal en el grafo, $m_P(z)=0$.

Es obvio que, en general, esos tres axiomas no especificarán una única medida m_P sino muchas, cada una de las cuales deberá explicitarse por medio de más información sobre el uso de P en X. Por ejemplo, en el caso de

P = pequeño en X = [0, 100] es, obviamente, $<_P = \leq^{-1}$ (el orden lineal inverso del intervalo), el único minimal del grafo ([0, 100], $\leq^{-1}$) es 100, el único maximal es 0 y, por tanto, las medidas son las muchísimas funciones decrecientes entre los puntos (100, 0) y (0, 1) del plano. Por consiguiente, tanto $1 - x/100$, como $(1 - x/100)^2$, etc., son funciones admisibles para medir la palabra 'pequeño'. Otras funciones como la que es igual a 1 entre 0 y 30, e igual a 0 entre 30 (por la derecha) y 100, verifican las propiedades básicas de una medida de 'pequeño', pero su discontinuidad en un punto (30 en este caso), hace que representen un uso preciso o rígido de la etiqueta lingüística 'pequeño' ('menor que 30' en este caso). Con la medida lineal $1 - x/100$, el grado en que '50 es pequeño' es 0.5, con la cuadrática $(1 - x/100)^2$ es 0.25 y con el rígido anterior es cero. El caso preciso muestra muchos prototipos, en tanto que los imprecisos con aquellas medidas continuas no muestran más que el cero, el único prototipo 'antes' de la medida; en el caso de un uso impreciso, el diseñador deberá añadir alguna condición, o hipótesis plausible, referente a la forma de la función de pertenencia.

Nótese, sin embargo, que de aceptar: $x =_P y \Leftrightarrow x <_P y \;\&\; y <_P x$, de (1) sigue $m_P(x) = m_P(y)$, por tanto que toda medida preserva la de los elementos que previamente son 'igualmente' P; estos siempre miden lo mismo.

En general, las tres propiedades anteriores no bastan para especificar una medida, pero si el predicado es preciso entonces el grafo (X, $=_P$) parte a X en dos clases, la de los que son igualmente P y su parte complementaria; la primera sólo puede medir 1 y la segunda 0, al tratarse, respectivamente, de maximales y minimales. Los predicados precisos sólo admiten una medida cuyos valores están en el subconjunto {0, 1} del intervalo unidad total [0, 1]; es el llamado principio de especificación de Cantor-Zermelo que, así, aparece como una (pequeña) consecuencia. También debe observarse, que en el caso impreciso pueden aparecer elementos con medidas 1 o 0 que, sin embargo, no sean maximales o minimales; también puede suceder que estos elementos no existan y la medida no tome los valores 0 o 1.

Cuando un diseñador intente especificar una de esas medidas, se encontrará fácilmente con la dificultad de no poder conocer toda sino una parte de la relación $<_P$; algo que no sucederá si P es preciso, ya que entonces se reconoce 'x es P' por una condición necesaria y suficiente que lleva directamente a toda la relación $=_P$. Por ello, el diseñador no podrá estar seguro de que la función de pertenencia μ_P que diseñe sea, en efecto, una medida y sólo podrá suponer la existencia de una de ellas, m_P, a la cual μ_P se aproxime uniformemente: Para cada $\varepsilon > 0$ y para cada x de X, es $|m_P(x) - \mu_P(x)| \leq \varepsilon$. No obstante, no se conoce bajo qué condiciones se pueda verificar esta aproximación, análoga a la que garantiza que la salida real de un sistema de reglas se aproxima universalmente por la salida teórica dada por la regla composicional de inferencia borrosa y un método de des-borrosificación[12]; es aún un problema abierto. Sin resolverlo teóricamente, el planteamiento no puede darse por terminado y algunos diseños podrán ser 'ciegos'. Es el caso cuando m_P es una 'campana' y se diseña μ_P como una función trapezoidal; la utilidad de la segunda será real cuando la diferencia entre ambas carezca de interés y debido, por ejemplo, a que su diferencia esté, en todos los puntos, por debajo de un umbral $\varepsilon > 0$ que pueda ser prácticamente reconocible.

II.4. Al no conocer $<_P$ que, en general, no será lineal sino con pares de elementos no comparables, el diseñador deberá contentarse con la nueva relación lineal $<_\mu$ definida en X por

$$x <_\mu y \Leftrightarrow \mu_P(x) \leq \mu_P(y),$$

la cual y supuesto que μ_P fuese una medida, contiene a la $<_P$ aunque sin siempre coincidir con ella: $<_\mu$ extiende el significado cualitativo $<_P$. *El acto de medir modifica el significado cualitativo*, lo extiende de $<_P$ a $<_\mu$; el diseñador trabajará con más arcos de los que hay en el grafo inicial, los habrá añadido e, incluso, puede creer que hay más minimales o maximales y tomará como prototipos o anti-prototipos de P en X a elementos con medida uno o cero pero que no lo eran en el inicial punto de vista cualitativo.

En resumen, el diseño de la función de pertenencia debe efectuarse con un cuidado exquisito por lo que respecta a la información que para ello se maneje. Debe capturarse lo mejor posible el significado total de P en X, aproximarse a la terna $(X, <_P, m_P)$ tanto como se pueda; es el caso citado, por ejemplo, de suponer que μ_P es trapezoidal, en el cual el diseñador debe justificar qué hipótesis ha considerado y su plausibilidad para la granularidad del problema en cuestión. Nótese que, en caso contrario, puede trabajarse con una función de pertenencia que no corresponda al uso real de P en X; puede haberse diseñado un problema distinto al que se considere, con lo cual y fácilmente los resultados numéricos que luego se obtengan pueden no responder a realidad alguna. Se habrá falsificado, o por lo menos cambiado, el problema en cuestión; se habrá modelado 'otro problema'.

Es pues esencial que el diseñador tome cuantas precauciones le sean posibles para asegurarse de que entre la función de pertenencia μ_P diseñada y alguna medida m_P no hay, prácticamente, diferencias apreciables. Ello forma parte del 'arte' del diseño de sistemas borrosos; un arte que sólo se

[12] J.L. Castro, M. Delgado, 1996, 'Fuzzy systems with defuzzification are universal approximators'; IEEE Trans. Syst. Man & Cybern, 28(1): 149- 152.

aprende prácticamente y que, necesariamente, requiere disponer de conocimientos teóricos aplicables al caso real en cuestión. Además, el diseñador debe aclarar si bien toma realmente el intervalo [0, 1] para los valores de la medida, bien otro conjunto de valores como pueden ser, por ejemplo, el de los números complejos (con el cual se miden ciertas magnitudes eléctricas), el de los sub-intervalos cerrados de [0,1], o el de los números borrosos. Ello depende de si cabe apreciar diferencias entre valores como son, por ejemplo, 0.71 y 0.72 que puede llevar a considerar como valor el intervalo [0.71, 0. 72]; o si la información se limita a 'el valor es alto', que puede llevar a tomar como valor a una adecuada función μ_{alto}: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

II.5. Finalmente y para acabar este apartado, conviene hacer un comentario sobre un uso alternativo de las funciones de pertenecía cuando por lo menos existe un punto de X en el que toman el valor uno (funciones normalizadas). Según la teoría de la posibilidad de Zadeh [13], tales funciones pueden considerarse 'distribuciones de posibilidad', útiles para afrontar problemas de incertidumbre en casos en los cuales la teoría de la probabilidad no sea aplicable; por ejemplo, cuando los 'sucesos' son imprecisos, no pueden formar un álgebra de Boole[14] y ni siquiera cabe efectuar experimentos aleatorios con ellos. ¿Qué indica la condición de tomar el valor uno?

Una función de pertenencia μ es auto-contradictoria (representa un estado auto-contradictorio de un conjunto borroso) cuando para toda función N: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$, representando la negación lingüística y supuesta que ésta es involutiva, es

$$\mu \leq N \circ \mu, \text{ es decir, } \mu (x) \leq f^{-1} (1 - f(\mu (x))),$$

siendo f una función entre [0, 1] y [0, 1] que, verificando las condiciones $f (0) = 0$ y $f (1) = 1$, sea estrictamente creciente[15]. Esa condición es obviamente equivalente a la desigualdad,

$$\mu (x) \leq f^{-1}(½) \text{ para todo x en X, [*]},$$

siendo $f^{-1} (1/2)$ necesariamente distinto de 0 y de 1; equivale a que la función μ sea menor que la función constantemente igual a $f^{-1}(1/2)$, valor que no es sino el punto fijo de la negación N (ya que es $N (f^{-1}(1/2)) = f^{-1} (1 - f$

[13] L. A. Zadeh, 1978, 'Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility'; Fuzzy Sets and Systems, 1: 3-28. E. Trillas, L. Eciolaza, 2015, Fuzzy Logic: An Introductory Course for Engineering Students. Springer.

[14] E. Trillas, 2017, On the Logos: A Naïve View on Ordinary Reasoning and Fuzzy Logic. Springer.

[15] E. Trillas, L. Eciolaza, 2015, Fuzzy Logic: An Introductory Course for Engineering Students. Springer.

$(f^{-1}(1/2))) = f^{-1}\ (1 - ½) = f^{-1}\ (1/2))$. Como sea que cada punto del intervalo abierto (0, 1) puede considerarse fijo para alguna función N, ello significa que μ debe sobrepasar, para no ser auto-contradictoria, todos los valores inferiores al número uno, es decir, debe tomar el valor uno en por lo menos un punto de X.

Así, aquella condición de 'normalización' de μ, no responde sino a que la etiqueta lingüística que la genera como función de pertenencia no puede designar un concepto auto-contradictorio. Es una condición necesaria y que no proviene sólo de la necesidad de poder efectuar determinado cálculo en la teoría de Zadeh, sino de que el concepto designado exista realmente, no sea auto-contradictorio. Recuérdese que, en el caso clásico, el único elemento auto-contradictorio es el mínimo del álgebra de Boole: $a \leq a' \Leftrightarrow a = 0$, el conjunto vacío si se quiere, ya que por el teorema de Stone el álgebra será isomorfa a una de partes de algún universo[16]. Obviamente, la función de pertenencia μ, correspondiente a un concepto preciso que satisfaga la desigualdad [*], debe verificar μ (x) = 0, para todo x de X, la del conjunto vacío.

III. El condicional

III.1. Nada en la lógica borrosa es universal, sino situacional, todo depende del significado contextual y, con frecuencia, está guiado por un propósito como sucede, por ejemplo, con las funciones de pertenencia cuya especificación depende del contexto en el que se use la etiqueta lingüística y, muchas veces, del propósito de tal uso. Lo mismo sucede con las que representan a los conectivos, los modificadores y los cuantificadores[17]; en el caso clásico, de los primeros no los hay y de los segundos sólo existen dos, 'todos' y 'algunos'. En el lenguaje natural no basta, como sucede en el lenguaje artificial de, por ejemplo, las matemáticas, con la sintaxis; la semántica, el significado, es esencial. En las matemáticas, el significado de las palabras necesarias para las pruebas viene dado por definiciones 'sí y sólo sí' previamente aceptadas.

También es así con los enunciados condicionales o reglas, 'Si p, entonces q' (p->q) que, en general, no muestran sino una condición suficiente para seguir q de p; muestran una relación entre el antecedente p y el consecuente

[16] E. Trillas, 2017, On the Logos: A Naïve View on Ordinary Reasoning and Fuzzy Logic. Springer.

[17] E. Trillas, L. Eciolaza, 2015, Fuzzy Logic: An Introductory Course for Engineering Students. Springer.

q y presentan, por lo menos para su diseño, dos caras distintas; la de su significado y la forma que este le impone, así como la de su especificación o diseño acorde con el uso que se pretenda del mismo. En suma, su forma simbólica y la especificación[18] tanto de las funciones de pertenencia de antecedente y consecuente, como de aquella función que represente al condicional.

Así, de ser p = 'x es P', q = 'y es Q', no sólo hay que especificar las funciones de pertenencia μ_P: X → [0, 1] y μ_Q: Y →[0, 1], sino también (si existe) una función numérica J: [0, 1] x [0, 1] →[0, 1], con la cual la función compuesta J o (μ_P x μ_Q)(x, y) = J (μ_P(y) , μ_Q(y)) refleje el significado de 'Si x es P, entonces y es Q' y facilite los grados en que se verifique ese condicional para todos los pares (x, y) en X x Y.

La función J no sólo deberá ser supuesta como existente y, de ser posible, probando que realmente existe, sino que deberá diseñarse de acuerdo con el significado cualitativo del enunciado condicional. Por ejemplo, de poder suponer plausiblemente que al decrecer los grados de P y crecer los de Q, J crece, entonces cabe representar J como una función compuesta J = H o (G x F), con H y F crecientes y G decreciente, como es el caso de las llamadas S-implicaciones borrosas, J(a, b)=S(N(a), b), con una t-conorma S y una negación fuerte N y de las que en la práctica debe justificarse su uso en cada caso. De poderse suponer que al crecer los grados de P y de Q también J crece, entonces bastará suponer que J es una función creciente en ambas variables, como es el caso de los condicionales de Mamdani-Larsen J(a, b) = T (a, b) con T = min, o T = prod, provenientes de entender 'Si p, entonces q' como 'p y q'.

En el lenguaje se encuentran casos de condicionales de varios tipos, en forma parecida a como sucede con las negaciones lingüísticas ('), que se caracterizan por verificar: p -> q => q' -> p', las hay que verifican bien p" -> p, bien p -> p", bien ambas expresiones, o bien ninguna de ellas.

La expresión funcional de los conectivos es sólo una hipótesis que, además, es difícil de comprobar ya que para ello no hay métodos sistemáticos sino que, con suerte, puede encontrarse algún punto donde la pretendida función deba tomar dos valores distintos. Aparte de la conocida lógica trivaluada de Bochvar, uno de cuyos conectivos no es funcional, hace años presenté, si bien creo muy bajo su interés práctico, un álgebra de conjuntos borrosos no funcional[19].

[18] E. Trillas, I. García-Hontado, 2012, 'A Reflection on Fuzzy Conditionals'. Combining Experimentation and Theory (Eds. E. Trillas *et altri*): 391-406.

[19] E. Trillas, E. Renedo, S. Guadarrama, 2001, 'On a new theory of fuzzy sets with just one self-contradiction; Proc. 10th Int. Conf. on Fuzzy Systems, II: 105-108.

El diseñador debe tener en cuenta que el hecho de que en un problema anterior y más o menos análogo, por ejemplo una S-implicación haya funcionado correctamente, en absoluto garantiza que ello vaya a suceder también en un nuevo caso por superficialmente parecido que pueda ser; esa es una de las debilidades que presentan los antes citados 'tool books'. La inducción comporta riesgos, notables algunas veces y que siempre deben intentarse controlar.

III.2. Pero no basta con especificar una función acorde con el significado; los enunciados condicionales se representan con la finalidad de emplear esa representación para algo; generalmente para efectuar una inferencia. Por ejemplo y en el caso clásico, una 'forma' que represente un enunciado condicional $p \to q$ y quiera usarse para deducir 'hacia adelante', deberá cumplir la desigualdad del Modus Ponens ($p \cdot (p \to q) \leq q$) y para deducir 'hacia atrás' la del Modus Tollens ($q' \cdot (p \to q) \leq p'$). Ello es el caso cuando, en el cálculo clásico se supone siempre $p \to q = p' + q$, con lo cual es $p \cdot (p' + q) = p \cdot q \leq q$ y $q' \cdot (p' + q) = q' \cdot p' \leq p'$. Ese es uno de los motivos por los cuales estudié las formas aristotélicas y, en particular, tanto las de la deducción, como las posibles elecciones de las funciones J.

Sin embargo y en el razonamiento de sentido común aparecen otros usos en los que el consecuente sólo es conjeturable desde el antecedente y la regla, desde las premisas $\{p, p \to q\}$ del razonamiento, debiéndose cumplir por tanto, $p \cdot (p \to q) \not\leq q'$[20]; así y de nuevo en el caso clásico, $p \cdot (p' + q) = p \cdot q \not\leq q'$, sólo puede analizarse algebraicamente de ser $q' \leq p \cdot q$, que implica $1 = q$ y exige que el consecuente q sea una tautología, sin poderse analizar, en general, el caso en que $p \cdot q$ no sea comparable con q'. En el caso de pretender que q sea una refutación de las premisas $\{p, p \to q\}$, es decir, $p \cdot q \leq q'$, se obtiene $p \cdot q = 0$, equivalente a $p \leq q'$: ello exige, simplemente, que antecedente y consecuente deban ser previamente contradictorios.

Un problema relacionado es el de la representación de los condicionales en las formas conjuntivas de Mamdani o Larsen[21], con las que se impone la rara conmutatividad de la conjunción en el lenguaje. En el caso clásico, $p \to q = p \cdot q$, está claro que $p \cdot (p \cdot q) = p \cdot q \leq q$, que puede emplearse para

[20] E. Trillas, L. Eciolaza, 2015, Fuzzy Logic: An Introductory Course for Engineering Students. Springer. E. Trillas, 2017, On the Logos: A Naïve View on Ordinary Reasoning and Fuzzy Logic. Springer.

[21] E. Trillas, L. Eciolaza, 2015, Fuzzy Logic: An Introductory Course for Engineering Students. Springer.

deducir hacia adelante; sin embargo, al ser $q' \cdot (p \cdot q) = 0$, el condicional conjuntivo no puede emplearse para hacerlo hacia atrás. El diseñador debe saber esas peculiaridades del condicional conjuntivo. Es más, de pretenderse lograr una refutación de, por ejemplo, el consecuente, $p \cdot (p \cdot q) = p \cdot q \leq q'$, ello implica que deba ser $p \cdot q = 0$, es decir, antecedente y consecuente incompatibles y, por ende, contradictorios en las álgebras de Boole- De pretenderse una conjetura del tipo $q' \leq p \cdot (p \cdot q) = p \cdot q$, resulta $p \cdot q = 1$ o sea $p = q = 1$, ambos antecedente y consecuente deben ser tautologías. Obviamente, igual resultado se obtiene en todos los casos en los cuales la conjunción de las premisas no es sino la de antecedente y consecuente. Son temas abiertos al estudio en el campo borroso[22].

III.3. Otros dos problemas relacionados son el hecho de que en los sistemas de reglas borrosas siempre se representan todas las reglas por la misma 'forma' lógica, por la misma función J, y que de emplear una que contenga la negación del antecedente, puede resultar difícil obtener un modelo de la misma a causa de la dificultad para representar la tal negación de un enunciado dinámico. En cuanto al primer problema, bastará que el diseñador se asegure de que, en efecto, los significados de todas las reglas se adaptan a una misma forma lógica. En el segundo, que aparece en casos como el del péndulo invertido donde reglas empíricas como 'Si el péndulo cae lentamente hacia delante, muévase la plataforma ligeramente hacia adelante', no permiten un modelo de la negación de 'El péndulo cae lentamente hacia adelante', y no hay otro remedio que ir a 'formas' que no contengan tal negación; por ejemplo, los condicionales de Mamdani-Larsen o las llamadas R-implicaciones, pero sin poder recurrir a ninguna 'fuzzy implication' que responda a la 'forma' material más general, $p \rightarrow q = p \cdot q + p' \cdot q + p' \cdot q'$, como son las S-implicaciones y las Q-implicaciones[23]. Por lo que respecta a las conjuntivas, que se usan gracias a las funciones $J(a, b) = T(a, b)$, con $T = \min$ o $T = \text{prod}$, hay que observar que la conmutatividad de T fuerza $p \rightarrow q = q \rightarrow p$, que en absoluto corresponde al significado de las reglas; así la anterior regla del péndulo invertido no equivale siempre a su inversa 'Si se mueve un poco la plataforma hacía adelante, el péndulo cae lentamente hacia adelante', por ello, es preferible emplear las formas $J(a, b) = T(a, b^s)$,

[22] E. Trillas, 2017, On the Logos: A Naïve View on Ordinary Reasoning and Fuzzy Logic. Springer.

[23] E. Trillas, L. Eciolaza, 2015, Fuzzy Logic: An Introductory Course for Engineering Students. Springer.

con $1 \leq s$, ya que para cualquier t-norma T*, es $T^*(a, T(a, b^s)) \leq b^s \leq b$, que permite tomar la mayor t-norma T* = min para obtener la mayor salida posible en la regla composicional de inferencia y habiéndose probado que, con ellas, la superficie de control se aproxima mejor que con s = 1[24]. Es sólo un ejemplo que, no obstante, muestra al diseñador que puede mejorar los cálculos numéricos si tiene en cuenta la falta de conmutatividad. Nótese que nunca se considera en esas representaciones la t-norma W ya que, al tener divisores de cero, podrían darse casos en que la regla tuviese grado nulo sin que lo tuviesen sus antecedente y consecuente. También debe observarse que las formas de Mamdani-Larsen no pueden emplearse sin riesgo para deducir hacia atrás, ya que de $\min(1\text{-}b, T(a, b^s)) \leq \min(1\text{-}b, b^s) \leq \min(1\text{-}b, b) \leq \frac{1}{2}$, se sigue que la función de pertenencia $\min(\beta', T(\alpha, \beta))$ representa una auto-contradicción.

Por lo que respecta a las llamadas R-implicaciones,

$$J_T(a, b) = \text{Sup}\,\{z \in [0, 1];\ T(a, z) \leq b\},$$

verifican la desigualdad MP con su misma t-norma continua T, son la mayor de cuantas J la verifican: $(T(a, J(a, b)) \leq b \Leftrightarrow J(a, b) \leq J_T(a, b))$, cumplen $a \leq b \Leftrightarrow J_T(a, b) = 1$ y las correspondientes a T=prod y T = min, no contienen la negación del antecedente[25]:

$$J_{prod}(a, b) = b/a \text{ y } J_{min}(a, b) = b, \text{ si } a > b.$$

Sin embargo y en cierta forma, pueden «esconder» tal negación ya que provienen directamente del caso clásico booleano donde, si el álgebra de Boole es completa, se verifica $p' + q = \text{Sup}\,\{z;\ p \cdot z \leq q\}$ y a ella se reducen si antecedente y consecuente son enunciados precisos; así, con T = W, es $J_W(a, b) = \min(1, 1\text{-}a\text{+}b)$, donde aparece el sumando 1-a (a») en esa suma acotada.

Finalmente, el diseñador no debe ignorar que las S y las Q-implicaciones verifican la desigualdad MP con la t-norma W; por ejemplo, $T(a, \max(1\text{-}a, b)) \leq b \Rightarrow T(a, 1\text{-}a) = 0 \Leftrightarrow T = W$ que tiene divisores de cero; ello puede llevar a que una regla con antecedente y consecuente de grado positivo muestre una conjunción de las premisas con grado nulo. Por ejemplo, si $\mu_P(x) = 0.4$ y $\mu_Q(y) = 0.6$, con $J(a, b) = \max(1\text{-}a, b)$ es $J(0.4, 0.6) = 0.6$ con lo cual resulta $W(a, J(a, b)) = W(0.4, 0.6) = 0$, que puede introducir eventuales

[24] C. Moraga, E. Trillas, S. Guadarrama, 2003, 'Multiple-Valued Logic and Artificial Intelligence. Fundamentals of Fuzzy Control Revisited'. Artificial Intelligence Review, 20: 169-173.

[25] E. Trillas, L. Eciolaza, 2015, Fuzzy Logic: An Introductory Course for Engineering Students. Springer.

limitaciones al modelo. Vale la pena recordar que si la t-norma producto es interactiva, mezcla los valores, la t-norma mínimo deja lagunas en las que mantiene un valor constante; por ejemplo prod (0.7, a) varía continuamente entre 0 y 0.7, en tanto que min (0.7, a) sólo vale 0.7 si $0.7 \leq a$, y a si $a < 0.7$.

III.4. La importancia práctica de los sistemas descritos por reglas lingüísticas imprecisas muestra el interés del ya viejo problema de los enunciados condicionales, que tampoco puede considerarse resuelto por completo. Las más de cuarenta funciones J que han sido empleadas para representar las reglas borrosas en el control borroso de máquinas y pertenecientes a varias formas distintas, son una muestra de ello[26].

IV. Conclusión

La lógica borrosa mantiene sus puertas abiertas a nuevas, no rutinarias y creativas ideas, especialmente si se la ve, en lugar de como una lógica deductiva, como un estudio experimental y teórico de ámbitos reales del lenguaje natural y el razonamiento ordinario que no son, necesariamente, de tipo deductivo formal (se sabe que no más allá del 25% del razonamiento humano se acerca al deductivo). Ese es, a mi modo de ver, el camino a seguir hacia el «Computing with Words» de Zadeh[27] que no hace, en realidad, sino volver a sus primeras ideas[28].

Es un hecho, sin embargo, que las aplicaciones de la lógica borrosa no sólo son tecnológicamente importantes y tienen un gran interés práctico, sino que a muchos de cuantos profesores y estudiantes se dedican a ella les interesan más que la teoría; se trata de un error potencial debido a la actual política que impera en el I+D y que presiona a los investigadores hacia las aplicaciones «prácticas». Algunas de tales aplicaciones ya empiezan a tener lugar dentro del «Soft Computing» y en la línea del «Computing with Words», en ámbitos virtuales requiriendo el diseño de sistemas descritos lingüísticamente pero con expresiones menos simples que las reglas imprecisas del control «fuzzy», las cuales suelen referirse a sistemas físicamente observables[29]. Es previsible, incluso, que tales sistemas lleguen a referirse a

[26] O. Cordón, F. Herrera, A. Pelegrin, 1997, 'Applicability of the fuzzy operations in the design of fuzzy logic controllers'; Fuzzy Sets and Systems, 86 (1): 15-41.

[27] L.A. Zadeh, 2012, Computing with Words: Principal Concepts and Ideas; Springer.

[28] L.A. Zadeh, 1965, 'Fuzzy Sets'; Information and Control, 8: 338-353.

[29] E. Trillas, S. Guadarrama, 2010, 'Fuzzy representations need a careful design'; International Journal of General Systems, 39/3: 329-346.

razonamientos ordinarios no deductivos, expresados en lenguaje natural[30] y de tipo conjetural, tanto abductivo como especulativo-inductivo. Todo ello requerirá de los diseñadores tanto un mejor dominio de las sutilezas del lenguaje, como del «arte» del diseño y, a la vez, un mejor conocimiento del «armamento» teórico de la lógica borrosa; a quienes quieran dedicarse a su estudio teórico, les requerirá un tratamiento de tipo experimental cercano a una «física del lenguaje» y no a la lógica formal. Para ello y en mi opinión, es urgente atender la necesidad de un nuevo tipo de cursos universitarios de lógica borrosa[31] que, hoy por hoy no existen y en los cuales el estudiante pueda aprender, junto a lo que se conoce teóricamente, sus limitaciones; cursos presentando modelos matemáticos directa y no sólo potencialmente referidos al diseño de sistemas «fuzzy».

No debemos caer en el error, como dice Gore Vidal en una de sus novelas[32], de «responder de antemano las cuestiones básicas». Veámoslo todo de nuevo pero críticamente; hagamos preguntas, buenas, genuinas, y busquémosles respuestas fértiles. No permitamos que la rutina nos lleve al pensamiento acrítico que es, sin duda, uno de los grandes males de la humanidad; una rutina que aparece, por ejemplo, con el simplificador uso, abusivo y esterilizador, de los típicos «tool-book» que se limitan a emplear aquellos modelos matemáticos que el correspondiente algoritmo computacional puede manejar y para los cuales ha sido programado.

Nunca, bajo ningún pretexto, debe limitarse la creatividad de quienes hacen su tesis doctoral y sus supervisores no han de olvidar las palabras de Albert Einstein, «la creatividad es contagiosa, ¡pásala!»; algo que exige profesores realmente creativos y que de no tenerlos cerca deben buscarse donde los haya y en base a exigentes criterios de relevancia internacional. Hay que huir, urgentemente, de la endogamia y la burocratización.

Pasados ya los primeros cincuenta años del artículo «Fuzzy Sets» de Lotfi A. Zadeh[33], el mejor homenaje que cabe hacerle es proceder a revisar críticamente los fundamentos de la lógica borrosa. Muy probablemente, sólo a través de una tal revisión se logren interesantes aplicaciones a los campos humanísticos como Zadeh supuso, en un principio, que sucedería[34].

Para acabar nada mejor que una frase de Pierre Curie y dirigida a los jóvenes investigadores: «Hagan de su vida un sueño y del sueño una realidad».

---

[30] E. Trillas, 2015, 'Glimpsing at Guessing'; Fuzzy Sets and Systems, 281: 32-43.

[31] E. Trillas, L. Eciolaza, 2015, Fuzzy Logic: An Introductory Course for Engineering Students. Springer.

[32] G. Vidal, 1999, La Institución Smithsoniana. Mondadori.

[33] L.A. Zadeh, 1965, 'Fuzzy Sets'; Information and Control, 8: 338-353.

[34] L.A. Zadeh, 1965, 'Fuzzy Sets'; Information and Control, 8: 338-353.

Dedicatoria

1) A Francesc Esteva, Luis Magdalena, Alejandro Sobrino y José Luis Verdegay: ¡Gracias por vuestra amistad!

2) A la USC, por su constante reconocimiento al autor.

Bibliografía

Alsina, C., Trillas, E. 2002, 'On the functional equation S_1 (x, y) = S_2 (x, T (N (x), y)'; Z. Daroczy, Z. Pales (Eds.), Functional Equations: Results and Advances: 323-334. Springer.

Castro, J.L., Delgado, M. 1996, 'Fuzzy systems with defuzzification are universal approximators'; IEEE Trans. Syst. Man & Cybern, 28(1): 149- 152.
https://doi.org/10.1109/3477.484447

Cordón, O., Herrera, F., Pelegrin, A. 1997, 'Applicability of the fuzzy operations in the design of fuzzy logic controllers'; Fuzzy Sets and Systems, 86 (1): 15-41.
https://doi.org/10.1016/0165-0114(95)00367-3

Mamdani, E.H., Trillas, E. 2012, 'Correspondence between an experimentalist and a theoretician'. Combining Experimentation and Theory (Eds. E. Trillas *et altri*): 1-18, Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-24666-1_1

Moraga, C., Trillas, E., Guadarrama, S. 2003, 'Multiple-Valued Logic and Artificial Intelligence. Fundamentals of Fuzzy Control Revisited'. Artificial Intelligence Review, 20: 169-173.
https://doi.org/10.1023/B:AIRE.0000006610.94970.1d

Trillas, E. 2015, 'Glimpsing at Guessing'; Fuzzy Sets and Systems, 281: 32-43.
https://doi.org/10.1016/j.fss.2015.06.026

Trillas, E. 2017, On the Logos: A Naïve View on Ordinary Reasoning and Fuzzy Logic. Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-56053-3

Trillas, E., Alsina, C. 2001, 'Elkan's Theoretical Argument, Reconsidered'; Int. Jour, Approx. Reasoning, 26: 146-152.
https://doi.org/10.1016/S0888-613X(00)00064-5

Trillas, E., Renedo, E., Guadarrama, S. 2001, 'On a new theory of fuzzy sets with just one self-contradiction; Proc. 10th Int. Conf. on Fuzzy Systems, II: 105-108.

Trillas, E., Guadarrama, S. 2010, 'Fuzzy representations need a careful design'; International Journal of General Systems, 39/3: 329-346.
https://doi.org/10.1080/03081070903552981

Trillas, E., García-Hontado, I. 2012, 'A Reflection on Fuzzy Conditionals'. Combining Experimentation and Theory (Eds. E. Trillas *et altri*): 391-406.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-24666-1_26

Trillas, E., Eciolaza, L. 2015, Fuzzy Logic: An Introductory Course for Engineering Students. Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-14203-6

Trillas, E., Moraga, C., Termini, S. 2016, 'A naïve way of looking at fuzzy sets'; Fuzzy Sets and Systems, 292: 380-395.
https://doi.org/10.1016/j.fss.2014.07.016

Vidal, G. 1999, La Institución Smithsoniana. Mondadori.

Zadeh, L.A. 1965, 'Fuzzy Sets'; Information and Control, 8: 338-353.
https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

Zadeh, L.A. 1978, 'Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility'; Fuzzy Sets and Systems, 1: 3-28.
https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90029-5

Zadeh, L.A. 2012, Computing with Words: Principal Concepts and Ideas; Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-27473-2