

## UN CONCEPTO DINÁMICO Y RELATIVO DE PARADOJA<sup>1</sup>

José Miguel Sagüillo<sup>1</sup> 

<sup>1</sup> Universidade de Santiago de Compostela, España

### Resumen

En este artículo una paradoja es un tipo de argumentación con respecto a un sujeto X (sea un individuo o una comunidad) en un determinado momento T. Muchas argumentaciones paradójicas tienen lugar en el desarrollo histórico y práctico de las ciencias. Algunas suponen grandes sorpresas acompañadas de profundas crisis, como ocurre con las llamadas antinomias. Solventar, y eventualmente resolver, una paradoja en este sentido supone avances revolucionarios que se obtienen al precio de rechazar creencias previamente asumidas o tenidas por verdaderas por la comunidad científica. El concepto de paradoja que se propone es relativo a sujetos y dinámico en el tiempo. Una argumentación que resulta paradójica para X pudiera no ser paradójica para Y, simplemente porque X e Y no tienen por qué compartir las mismas creencias. Asimismo, X puede descubrir que tiene una paradoja en T, y dejar de tenerla ulteriormente en virtud de un cambio de sus creencias.

**Palabras clave:** argumentación; creencia; paradoja; antinomia; solventar; resolver; Tarski; Quine; práctica deductiva.

### Abstract

In this paper a paradox is a kind of argumentation with respect to a subject X (an individual thinker or a community) in a given time T. Many paradoxical argumentations take place in the historical and practical development of sciences. Some of them involve big surprises followed by deep crises, as it happens with the so-called antinomies. Solving, and eventually resolving, a paradox in the present sense involves revolutionary changes obtained through important communal belief revisions. The proposed concept of paradox is both relative to participants and dynamic in time. A given argumentation, which is a paradox for X, may not be a paradox for Y, simply because X and Y does not need to share the same beliefs. Likewise, X may discover that a given argumentation is paradoxical for her in time T, and not having such a paradox in  $T_1$  in virtue of X's change of beliefs.

**Keywords:** argumentation; belief; paradox; antinomy; solving; resolving; Tarski; Quine; deductive practice.

---

<sup>1</sup> Este texto fue presentado como “lección magistral” con motivo de la Festividad de San Isidoro de Sevilla, patrón de la Facultad de Filosofía, curso 2021-2022. El autor agradece los comentarios y preguntas que surgieron en el ulterior debate.

## 0. INTRODUCCIÓN

En esta lección una paradoja es un tipo de argumentación con respecto a un sujeto X (sea un individuo o una comunidad) en un determinado momento T. Muchas argumentaciones paradójicas tienen lugar en el desarrollo histórico y práctico de las ciencias. Algunas suponen grandes sorpresas acompañadas de profundas crisis, como ocurre con las llamadas antinomias. Solventar o resolver una paradoja en este sentido supone avances revolucionarios que se obtienen al precio de rechazar creencias previamente asumidas o tenidas por verdaderas por la comunidad científica. Un mensaje importante en este contexto es que “En lógica a veces hay sorpresas” *pace* Wittgenstein (1973/85), quien concluye en su sentencia 6.1251 del *Tractatus* que “Por tanto, en lógica jamás puede haber sorpresas”. Esta discrepancia se explica a partir de la concepción filosófica que sobre la lógica se esgrime. En efecto, la lógica entendida como ontología formal que subyace al *Tractatus*, se contrasta con la lógica como epistemología formal de esta lección. Es decir, no se trata de entender la lógica como el estudio del “armazón o andamiaje lógico del mundo” (6.124), sino como el estudio del razonamiento humano a la luz de la práctica demostrativa que resulta especialmente abundante en la matemática. Así, la idea de paradoja que se articula involucra elementos ónticos, elementos epistémicos y elementos pragmáticos, que se revelan en una mirada comprensiva, histórica y práctica de la argumentación científica.

La creencia juega un rol explicativo fundamental en el concepto de paradoja que se desarrolla.<sup>2</sup> Creer es una actitud proposicional. Podemos desarrollar creencias acerca de la verdad o falsedad de un determinado enunciado o proposición. La creencia presupone sujetos pensantes con capacidad racional en posesión de evidencia parcial (no suficiente) que sustenta la verdad o falsedad de la proposición que se considere. Las creencias son revisables en el sentido de que a veces podemos tener creencias equivocadas. Es decir, poder creer que una determinada proposición es verdadera y que la proposición en cuestión sea falsa. Similarmente, podemos creer que una determinada proposición es falsa y que la proposición en cuestión sea verdadera. También, podemos obtener conocimiento en el sentido no de mera creencia sino de sapiencia. Saber es otra actitud proposicional. La sapiencia presupone sujetos pensantes con capacidad racional en posesión de evidencia *suficiente* que sustenta la verdad o la falsedad de la proposición que se considere. El saber no es revisable. En el sentido “fuerte” de la palabra saber que empleamos, no hay tal cosa como saber la verdad de una proposición que no sea verdadera o que no sea el caso. Esto no significa que seamos infalibles. Sólo significa que dado el significado fuerte que asociamos a la palabra ‘saber’, ningún sujeto sabe que  $2 + 2 = 5$ . Finalmente, si sabemos que cierta proposición es el caso también creemos que tal proposición es el caso, pero si creemos que cierta proposición es el caso, no se sigue que sepamos que tal proposición sea el caso.

## 1. DIMENSIÓN ÓNTICA: ARGUMENTOS Y LÓGICA

Un argumento es un sistema de dos partes  $\langle P, c \rangle$  compuesto por un conjunto de premisas  $P$  y una conclusión  $c$ . Esta noción de argumento no presupone ninguna presencia de sujetos inteligentes que capten premisas o que razonen. Las expresiones ‘premisas’ y ‘conclusión’ son

<sup>2</sup> El tratamiento clásico contemporáneo de la creencia como actitud proposicional revisable se encuentra en Hintikka, J. (1962/79). El libro es una tentativa inicial formal para discernir la relación entre creer y saber entendidas como modalidad doxástica y epistémica respectivamente.

simplemente términos rol. Este concepto de argumento es de naturaleza puramente óptica, frente al concepto de argumentación, que como se caracteriza en la siguiente sección, contiene una cadena de razonamientos **R** que hace referencia implícita a sujetos inteligentes que piensan y razonan.

Dado un argumento  $\langle \mathbf{P}, \mathbf{c} \rangle$ , o es lógicamente válido, o es lógicamente inválido, dependiendo de si **P** implica lógicamente **c**, o de si **P** no implica **c**. Dicho de otro modo, un argumento es válido o inválido dependiendo de si **P** tiene información suficiente para **c**, o de si **P** no tiene información suficiente para **c**. Un argumento es válido o inválido *per se*.

Implicación lógica en sentido general: Dado un argumento  $\langle \mathbf{P}, \mathbf{c} \rangle$  con un conjunto **P** de premisas, y una conclusión **c**, existen exactamente dos casos:

- $\langle \mathbf{P}, \mathbf{c} \rangle$  es válido si y sólo si **P** implica **c**, o de lo contrario,
- $\langle \mathbf{P}, \mathbf{c} \rangle$  es inválido si y sólo si **P** no implica **c**.

Implicación lógica en sentido específico: Dado un conjunto **P** de premisas, y dadas una proposición **c**, y su negación **no-c**, respectivamente con el rol de conclusión, existen exactamente cuatro casos:

- i) **P** implica **c**, pero **P** no implica **no-c**.  
Ejemplo:  $[a = b, b = c]$  implica  $a = c$ , pero  $[a = b, b = c]$  no implica  $a \neq c$
- ii) **P** no implica **c**, pero **P** implica **no-c**.  
Ejemplo:  $[a = b, b \neq c]$  no implica  $a = c$ , pero  $[a = b, b \neq c]$  implica  $a \neq c$
- iii) **P** implica **c**, y **P** implica **no-c**.  
Ejemplo:  $[a = b, b = c, a \neq c]$  implica  $a = c$ , y  $[a = b, b = c, a \neq c]$  implica  $a \neq c$
- iv) **P** no implica **c** y **P** no implica **no-c**.  
Ejemplo:  $[a = b, b = c]$  no implica  $c = d$ , y  $[a = b, b = c]$  no implica  $c \neq d$

El caso iii) es especialmente relevante para el tema de las paradojas y muestra el sustrato lógico de muchas paradojas. Nótese que en iii) el conjunto de premisas **P** es inconsistente o contradictorio. En todo conjunto contradictorio **P** es imposible que todas sus proposiciones sean verdaderas. En todo conjunto contradictorio **P** siempre hay al menos una proposición falsa, aunque no sepamos cuál. Nótese también que la contradictoriedad de **P** en el caso iii) no es explícita porque **P** no contiene un par de proposiciones contradictorias, aunque sí implica un par de proposiciones opuestas o contradictorias. Constatamos, entonces, que en algunos casos **P** es contradictorio pero que dicha contradictoriedad pudiera pasar desapercibida a alguien que no dedujera sus implicaciones o consecuencias lógicas. Conviene recordar aquí el principio de irrelevancia de los valores de verdad de premisas y conclusión con respecto a la validez de los argumentos. Hay argumentos válidos con premisas todas verdaderas y conclusión verdadera; hay argumentos válidos con al menos una premisa falsa y conclusión verdadera; y hay argumentos válidos con al menos una premisa falsa y conclusión falsa. Puesto que ningún conjunto **P** de premisas todas verdaderas implica una conclusión **c** falsa, tenemos que no hay argumentos válidos con premisas todas verdaderas y conclusión falsa. Decimos que todo argumento con premisas todas verdaderas y conclusión falsa es inválido *de facto*.

## 2. DIMENSIÓN EPISTÉMICA: ARGUMENTACIONES<sup>3</sup>

Una argumentación es un sistema de tres partes,  $\langle P, R, c \rangle$ , compuesto por un conjunto de premisas  $P$ , una cadena de razonamientos intermedios  $R$  que lleva de  $P$  a  $c$ , y una conclusión  $c$ . La noción de argumentación es epistémica porque presupone la existencia de sujetos agentes con capacidad para razonar o inferir  $c$  desde  $P$  mediante la realización de la cadena  $R$  de razonamientos intermedios. La expresión argumentación no es “exitosa” en el sentido de que no es cierto que toda argumentación sea correcta o cogente. En efecto, toda argumentación que contiene un error o un ardid en sus razonamientos intermedios  $R$  es una falacia. Una falacia es una argumentación “fallida”. Hay falacias que involucran trucos o ardidés que presuponen intencionalidad moralmente execrable. En la literatura frecuentemente se les llama sofismas.

La deducción es un tipo de argumentación “exitosa”  $\langle P, R_{\text{cogente}}, c \rangle$ . Es decir, una deducción es una argumentación que no contiene errores de razonamiento o falacias. Decimos entonces que  $R$  es cogente o correcto. El único modo que tenemos las personas de determinar o llegar a saber que un argumento  $\langle P, c \rangle$  es válido (cuando lo es) es mediante la realización de una deducción  $\langle P, R, c \rangle$  que muestra que la información en  $c$  está ya contenida en  $P$ , y lo muestra mediante la cadena cogente de razonamientos intermedios  $R$ . Razonar en este sentido es procesar la información contenida en las premisas. Conviene recordar aquí que la existencia de implicación lógica entre un conjunto de premisas  $P$  y una conclusión  $c$  o, de modo converso, que  $c$  sea consecuencia lógica de  $P$  o, equivalentemente, que la validez del argumento  $\langle P, c \rangle$  es condición necesaria pero no suficiente para la deducción de  $c$  desde  $P$  mediante una cadena de razonamientos intermedios  $R$ .

La prueba es una subespecie de deducción, donde las premisas se saben verdaderas para el agente. Una prueba es un sistema de tres partes  $\langle P_{\text{sv}}, R_{\text{cogente}}, c \rangle$ . Desde un punto de vista cognitivo una deducción muestra para el que la sigue o realiza que la conclusión se sigue de las premisas o, lo que es lo mismo, que la información de la conclusión está contenida en la información de las premisas. Desde un punto de vista cognitivo una prueba muestra para la persona que la sigue o realiza, no sólo que la conclusión se sigue de las premisas, sino también que la conclusión es verdadera en virtud de que necesariamente se sigue de proposiciones todas sabidas como verdaderas. Cualquier persona que tenga una prueba  $\langle P_{\text{sv}}, R_{\text{cogente}}, c \rangle$ , no sólo sabe que el argumento correspondiente  $\langle P, c \rangle$  es válido, sino que además sabe que la conclusión  $c$  es verdadera, puesto que se extrae como consecuencia desde un conjunto  $P$  de premisas, todas sabidas como verdaderas. Tenemos entonces que toda prueba es una deducción, pero no toda deducción es una prueba. Conviene también recordar aquí dos principios complementarios:

- .1 Principio de verdad y consecuencia: toda consecuencia lógica  $c$  de un conjunto  $P$  de premisas todas verdaderas es también verdadera.
- .2 Principio de falsedad y consecuencia: Todo conjunto  $P$  de premisas que implica una consecuencia  $c$  falsa contiene al menos una premisa falsa.

## 3. DIMENSIÓN DOXÁSTICA: PARADOJAS<sup>4</sup>

Una paradoja  $\langle P_{\text{cv}}, R_{\text{cc}}, C_{\text{cf}} \rangle$  es una argumentación donde las premisas  $P$  se creen verdaderas, la cadena de razonamiento  $R$  se cree correcta y la conclusión  $c$  se cree falsa.

<sup>3</sup> Sigo en esta sección el marco conceptual del artículo fundacional [Corcoran, J. \(1989\)](#).

La actitud proposicional de creencia hace referencia elíptica a un sujeto X (individuo o comunidad) en un tiempo T y explicita el hecho de que las paradojas, al igual que las deducciones y las pruebas, son relativas al participante. Como ningún conjunto de premisas todas verdaderas implica o contiene la información de una proposición falsa, se sigue que una paradoja en el sentido presente involucra al menos una creencia equivocada en T por parte de X:

- 1) X cree equivocadamente en T que todas sus premisas son verdaderas.
- 2) X cree equivocadamente en T que su cadena de razonamientos es cogente.
- 3) X cree equivocadamente en T que su conclusión es falsa.

Claramente, las paradojas así entendidas son objetos pragmáticos transitorios, contrariamente a las pruebas y a las deducciones, las cuales son persistentes, ya que el descubrimiento de una paradoja por X en T conlleva a que tarde o temprano X deba cambiar al menos una de sus tres creencias previas. La respuesta natural del X es suspender sus creencias y revisarlas hasta que compruebe la veracidad de la información disponible u obtenga ulterior información que le permita identificar cuál o cuáles de sus tres creencias son equivocadas. Esto subraya la relatividad de las paradojas a sujetos, quienes además pudieran no haber considerado previamente que la argumentación en cuestión era paradójica. Las personas descubren sus paradojas y cuando X tiene una paradoja en el presente sentido, X es consciente de ello, es decir, X sabe que la tiene. Así, descubrir una paradoja no sólo constituye una sorpresa, sino que, dependiendo de la relevancia del tema, puede ser extremadamente incómoda intelectualmente, y puede generar crisis en el desarrollo del conocimiento.

3.1 Antinomias<sup>5</sup> : Cuando X cree que **R** es cogente y confirma que la conclusión **c** es falsa, entonces, puesto que ningún conjunto de premisas todas verdaderas tiene una conclusión falsa, X pasa a creer que su conjunto de premisas P contiene al menos una falsa. Esto supone reclasificar la paradoja como una candidata a deducción. Un subcaso especial aquí es cuando la conclusión no sólo se cree falsa, sino contradictoria. La argumentación paradójica en este caso frecuentemente se denomina 'antinomia'. Nuevamente por la ley de falsedad y consecuencia, X se percata de que P es inconsistente o contradictorio. Una paradoja antinómica con respecto a un sujeto o a una comunidad científica en un tiempo T ejemplifica el caso del descubrimiento de "anomalías" dentro del paradigma vigente que, en ocasiones, pueden llevar a revisar principios importantes quizás hasta entonces aceptados de modo poco crítico. Siguiendo a [Ramsey \(1925\)](#) las antinomias se han clasificado en lógicas y semánticas. Podemos actualizar esta terminología distinguiendo entre antinomias teóricas, las cuales se desarrollan en argumentaciones del lenguaje objeto de una disciplina y antinomias meta-teóricas, las cuales involucran argumentaciones metalingüísticas.

Las siguientes tres condiciones son cada una de ellas necesaria, y la conjunción de las mismas quizás suficiente, para que una argumentación paradójica sea una antinomia:

1. Condición lógica: la conclusión es creída no meramente como falsa, sino que es creída como contradictoria por X.

---

<sup>4</sup> Dos artículos seminales que anteceden esta presentación son Sagüillo, J.M. (1995) y (1996).

<sup>5</sup> Para una caracterización detallada del concepto de antinomia véase [Sagüillo, J.M. \(2011\)](#).

2. Condición epistémica: el tema o asunto de las premisas de la antinomia conciernen a sub-áreas de conocimiento sólidamente establecido y asentado en la red de creencias de la comunidad a la que pertenece X.
3. Condición psico-sociológica: la posibilidad de poner en tela de juicio las premisas de la argumentación o el razonamiento empleado que lleva a la conclusión creída como contradictoria genera desasosiego e impacto en la comunidad a la que pertenece X.

A modo de ilustración se desarrollan a continuación tres ejemplos paradigmáticos de paradojas antinómicas en el presente sentido:

- a) la argumentación de los antiguos griegos que establece una contradicción a partir del supuesto de la conmensurabilidad entre el lado y la diagonal de un cuadrado en términos de números enteros.<sup>6</sup>
- b) la argumentación de Russell que establece una contradicción a partir del *principio de comprensión ingenuo*, que dice que cualquier propiedad determina la existencia de un conjunto cuyos miembros son exactamente aquellos que poseen dicha propiedad.<sup>7</sup>
- c) la argumentación del mentiroso que establece una contradicción a partir del supuesto de que una oración del lenguaje objeto exprese de modo autorreferente su propia falsedad.<sup>8</sup>

- a) - P1 Todo par de segmentos p y q son conmensurables en términos de números enteros
  - P2 Todo cuadrado es el doble de un cuadrado
  - P3 Un número es par si y sólo si es divisible por dos
  - P4 Si  $p^2$  es par entonces p es par
 ? q es par y q es no-par

Razonemos asumiendo, como hicieron los griegos, el conjunto de premisas que ellos creían todas verdaderas. Sea A un cuadrado con diagonal p y lado q. Por P1, p y q son conmensurables en números enteros. Si ambas medidas son pares, dupliquemos la unidad de medida de p y q hasta que no sea el caso que las dos sean pares. Por P2, tenemos que  $p^2 = 2 q^2$ . Puesto que  $p^2$  tiene al dos como divisor se sigue por P3 que  $p^2$  es par. Por P4, tenemos entonces que p es par. Puesto que p y q no son ambos pares entonces q es no-par. Puesto que p es par tenemos por P3 que  $p = 2 r$ . Por sustitución entonces obtenemos  $(2 r)^2 = 2 q^2$ , que es lo mismo que  $4 r^2 = 2 q^2$  y que  $2 r^2 = q^2$ . Luego  $q^2$  tiene al dos como divisor y por tanto es par de acuerdo con P3. Se sigue por P4 que q es par. Por tanto, q es par y q es no-par.

- b) - P1 Toda propiedad **P** determina la existencia de un conjunto **x**, cuyos miembros **y** son exactamente aquellos que satisfacen **P**

<sup>6</sup> El impacto histórico de esta antinomia es ampliamente tratada en el capítulo V de Heath, T. (1921/81).

<sup>7</sup> Para una presentación autorizada de la crisis fundacional que produjo esta paradoja véase el capítulo I de Fraenkel, A. y Bar-Hillel, J. (1958).

<sup>8</sup> Una presentación sistemática y concisa del mentiroso se encuentra en la introducción de Martin, R. (1984). Este libro contiene una amplia panorámica de las aportaciones recientes sobre el tema.



- P2 Sea **A** la propiedad relacional de **y** de no ser miembro de sí mismo
- P3 Sea Alfa el conjunto cuyos miembros **y** son exactamente los conjuntos que no son miembros de sí mismos.

? Alfa es miembro de sí mismo y Alfa no es miembro de sí mismo

Razonemos: necesariamente es el caso que Alfa no es miembro de sí mismo o que lo es. Supongamos que Alfa no es miembro de sí mismo. Luego, por P3, Alfa está en el conjunto Alfa cuyos miembros son los conjuntos que no son miembros de sí mismos. Por tanto, Alfa es miembro de Alfa. Concluimos que Alfa es miembro de sí mismo. Supongamos ahora que Alfa es miembro de sí mismo. Luego, por P3, Alfa no está en el conjunto Alfa cuyos miembros no son miembros de sí mismos. Por tanto, Alfa no es miembro de Alfa. Concluimos que Alfa no es miembro de sí mismo. Comprobamos que en ambos casos de la disyunción inicial, y empleando las premisas del argumento, obtenemos proposiciones contradictorias a través de una cadena de razonamientos intermedios.

c) - P1 Epiménides es cretense

- P2 Epiménides dice que todos los cretenses son mentirosos

? Epiménides es mentiroso y Epiménides no es mentiroso

Razonemos: Necesariamente es el caso que Epiménides es mentiroso o que no lo es. Si lo es, entonces, asumiendo P1, lo que dice P2 es el caso **y**, por tanto, Epiménides no es mentiroso. Si no lo es, entonces, asumiendo P1, lo que dice en P2 no es el caso **y**, por tanto, Epiménides es mentiroso. Comprobamos entonces que, en ambos casos de la disyunción inicial, concluimos en pares de proposiciones contradictorias a través de una cadena de razonamientos intermedios.

Una argumentación no antinómica para  $X$  en un tiempo  $T_i$  puede pasar a ser una argumentación antinómica para  $X$  en un tiempo ulterior  $T_j$ . Similarmente, una argumentación antinómica para  $X$  en un tiempo  $T_i$  puede dejar de serlo en un tiempo ulterior  $T_j$ . En ocasiones también, una argumentación no antinómica para  $X$  en  $T_k$  puede llegar a ser antinómica en  $T_m$  para  $Y$ . Esta última circunstancia se dio históricamente entre Cantor y Russell. [Cantor \(1899\)](#) demostró, poco antes de que [Russell \(1902\)](#) descubriera la antinomia de los conjuntos, su teorema de multitudes no coleccionables, al efecto de que el principio de comprensión ingenuo es falso, conocido como el teorema de multitudes no coleccionables de Cantor: "No toda propiedad determina la existencia de un conjunto cuyos elementos son exactamente aquellos objetos que tienen dicha propiedad". La argumentación previa b) fue una deducción para Cantor que muestra que la premisa 1 es falsa, *de facto* contradictoria, porque implica lógicamente una proposición obviamente contradictoria. Cantor creía que la premisa era falsa y empleó esta deducción que ejemplifica el método hipotético deductivo para determinar su falsedad. Sin embargo, la argumentación previa era una paradoja para Russell, quien creía que la premisa 1 era verdadera y se encontró con una cadena de razonamiento que creía correcta o cogente y una conclusión que creía falsa. Cantor probó el teorema de multitudes no coleccionables. Russell descubrió la paradoja que lleva su nombre y la necesidad de revisar alguna de sus creencias. De modo similar, en epistemología contemporánea tenemos que [Fitch \(1963\)](#) demostró su teorema de la clase de verdad, mientras que más tarde [Hart \(1979\)](#) planteó su paradoja de la cognoscibilidad.

## 4. RECLASIFICACIÓN DE LAS PARADOJAS

Solventar una paradoja también es relativo al participante. Este proceso consiste en cambiar el estado de creencias del sujeto X con respecto a la argumentación en cuestión de modo que deje de ser una paradoja para X. La expresión 'solventar' se emplea como resultado de cambiar al menos una de las tres creencias iniciales de la argumentación paradójica. Es decir, solventamos una paradoja cuando creemos que al menos una premisa es falsa, o cuando creemos que el razonamiento es falaz, o cuando creemos que la conclusión es verdadera. Podemos reservar la expresión 'resolver' para el resultado de obtener conocimiento, es decir, resolvemos una paradoja cuando llegamos a saber cuál o cuáles de nuestras creencias previas eran equivocadas, acompañando mejoras e innovaciones.

Así pues, tenemos tres casos para considerar:

- 1 Si el cambio de creencia se produce con respecto a la verdad de las premisas entonces la paradoja queda reclasificada como "candidata" a deducción. Este caso abre la doble posibilidad de que se trate de una deducción indirecta de la inconsistencia del conjunto de premisas, o que se trate de una deducción indirecta de la negación de la conjunción de las premisas. Recordemos que todo conjunto inconsistente de proposiciones contiene al menos una proposición falsa, pero no todo conjunto que contiene una proposición falsa es inconsistente. Por ejemplo, [Cantor \(1899\)](#) había identificado que la falsedad del principio de comprensión ingenuo provenía de su excesiva generalidad. Consiguió discernir que había multiplicidades consistentes y multiplicidades inconsistentes, y que sólo las primeras deberían considerarse conjuntos. La resolución final del problema la propuso [Zermelo \(1908\)](#) en su axioma de subconjunto o axioma de separación, el cual incorpora de modo expreso la limitación del tamaño de los conjuntos definibles en la teoría, rechazando por inconsistentes, las multitudes máximamente grandes como el conjunto de todos los conjuntos, el conjunto de todos los ordinales, y semejantes. Todo conjunto definible mediante el axioma de separación resulta ser subconjunto de una totalidad ya dada. Así podemos probar que la totalidad de todos los conjuntos no es un conjunto. La teoría de conjuntos de [von Neumann \(1925\)](#), equivalente a la de Zermelo, introduce la clase de todos los conjuntos. Los conjuntos son miembros de otras clases, pero la clase de todos los conjuntos no es un conjunto sino una clase propia.
- 2 Si el cambio de creencia se produce con respecto a la cogencia de su cadena de razonamientos intermedios entonces la paradoja se reclasifica como "candidata" a falacia. Este caso puede también invitar a dudar la hipótesis de que el argumento  $\langle P, c \rangle$  correspondiente sea válido. Las dificultades aquí pueden ser variadas, tal como ocurre con la ambigüedad, la presuposición, la incoherencia, la vaguedad, etc. En algunos casos podremos resolver los errores de razonamiento enmendando R, dada la información ya contenida en las premisas. En los casos de presuposición será necesario añadir más premisas.

Los casos de incoherencia y vaguedad son especialmente significativos puesto que históricamente han originado propuestas más radicales que suponen revisar la lógica subyacente, ya sea de la gramática del lenguaje o del razonamiento R. Con respecto a la paradoja de Russell, su diagnóstico consistió en pensar que el razonamiento no era correcto al considerar expresiones autorreferentes (Alfa es miembro de sí mismo, Alfa no es miembro de sí mismo) como incoherencias. Su propuesta de solución se



conoce como teoría de tipos, de modo que una fórmula está bien formada sólo si el tipo lógico de los conjuntos a la izquierda de la pertenencia o membrecía es un grado menor inmediato al tipo lógico de los conjuntos a la derecha de dicha relación. De tal modo que Alfa es miembro del conjunto, uno de cuyos elementos es Alfa.

Similarmente, la resolución de [Tarski \(1937\)](#) a la paradoja del mentiroso monta tanto como haberla reclasificado como una falacia de ambigüedad estructural; la oración del mentiroso, por ejemplo, 'Esta oración es falsa', es una pseudo-oración (con aspecto inicial de oración) que en realidad no expresa una proposición. Por tanto, el razonamiento R realmente no engancha o "despega" de inicio. Tarski propone trasladar el problema a un lenguaje formal estratificado, donde el predicado 'verdadero' aplicado a una oración de nivel  $n$  debe pertenecer al nivel  $n + 1$ , donde el lenguaje  $n$  es un sublenguaje del  $n + 1$ . [Burge \(1979\)](#), propone en cambio tratar los predicados 'verdadero' y 'falso' como indécicos que adquieren sentido y se estratifican de modo contextual. Por otro lado, la solución de [Kripke \(1975\)](#) propone evitar la regimentación jerárquica a cambio de introducir huecos de valores de verdad mediante funciones parciales y funciones de aproximación hasta su cierre en un punto fijo. Recientemente, [Read \(2008\)](#) ha propuesto una solución donde la oración del mentiroso resulta falsa, extendiendo la lógica clásica con operadores modales y modificando de modo correspondiente el esquema T de Tarski.<sup>9</sup> Finalmente, [Priest \(1984\)](#) propone considerar la oración del mentiroso como verdadera y falsa a la vez, pero bloqueando las consecuencias "explosivas" de una contradicción.

El caso de la vaguedad también merece mención especial con la famosa paradoja del "montón", una de cuyas propuestas de solución por [Fine \(1975\)](#) ha propiciado la aplicación de una lógica subyacente borrosa o vaga. La idea aquí es que la vaguedad se debe a una deficiencia o indecisión semántica que requiere "precisificación" para aquellos casos que no son nítidos de verdad o de falsedad. La lógica que resulta emplea huecos de valores de verdad que se cierran mediante super-valoraciones.

- 3 Finalmente, si el cambio de creencia se produce con respecto a la falsedad de la conclusión entonces la paradoja se reclasifica como una "candidata" a prueba de su conclusión. En este caso, si X reafirma su creencia en la verdad de las premisas en **P** y reafirma su creencia en la cogencia del razonamiento **R**, la conclusión  $c$  pasa a ser creída como verdadera por X. Aquí incluimos la paradoja de [Skolem \(1922\)](#), que establece la relatividad de las nociones conjuntistas cuando contrastamos algunas discrepancias entre nuestras intuiciones conjuntistas y sus contrapartes formales en axiomatizaciones de primer orden. También el resultado de [Gödel \(1931\)](#), que establece que ningún sistema deductivo consistente capaz de contener a la aritmética es completo; es decir, siempre hay verdades numéricas que no son deducibles en el sistema. Este resultado vino a traicionar grandes expectativas y la preconcepción de que la verdad aritmética consistía en la demostrabilidad.

---

<sup>9</sup> Para una discusión crítica de esta propuesta véase [Sagüillo, J.M. \(2008\)](#).

## 5. EN DIÁLOGO CON TARSKI Y QUINE

A efectos de comparación de rendimientos conviene contrastar la noción de paradoja presentada con las propuestas de Tarski y Quine. Comprobemos hasta donde coinciden y en donde difieren las tres propuestas.

En Tarski (1969), encontramos que señala dos tendencias históricas con respecto a las paradojas: un enfoque ha sido *de facto* tratarlas como si fueran meros sofismas sin trascendencia, con una finalidad meramente retórica que pudiera ensalzar el ego de quien las propone. El otro enfoque, al cual Tarski se adhiere, ha consistido en considerar a las *antinomias* como “síntomas de enfermedad”, ya que Tarski “no puede reconciliarlas como un elemento permanente de nuestro sistema de conocimiento”. Por tanto, para él las paradojas antinómicas no solo son dinámicas y admiten, por consiguiente, reclasificación, sino que son una ocasión para el avance del conocimiento.

Tarski centra su interés en las antinomias, a las que considera también argumentaciones que “desde premisas que parecen intuitivamente obvias a través de formas de razonamiento que parecen intuitivamente ciertas, nos conducen a un sinsentido, una contradicción”. En este contexto, considera dos casos como salidas a la antinomia: 1) donde la presencia de la conclusión invita a considerar que al menos una premisa es falsa, o, 2) donde la presencia de la conclusión invita a considerar que el razonamiento desde premisas es falaz. Probablemente la razón de que trate sólo dos salidas a las paradojas y no tres como en la presente propuesta, se deba a que Tarski se centra en las antinomias, y por tanto no considera conclusiones que no sean contradictorias. Presumiblemente el tercer caso que hemos propuesto, es decir, la reclasificación de la paradoja como candidata a prueba, Tarski lo ignora ante lo poco plausible de que una proposición contradictoria *simpliciter* en su caracterización –no que *parece* contradictoria, ni que es *creída* contradictoria— pudiese ser considerada verdadera.

Conviene señalar que Tarski también emplea ‘sinsentido’ para referirse a la conclusión de la antinomia. Un sinsentido no tiene un valor de verdad, mientras que una contradicción siempre es falsa. Esta oscilación terminológica se da en el contexto de la discusión tarskiana de la antinomia del mentiroso y pudiera indicar una retroalimentación entre lo que Tarski considera la paradoja y lo que él propone como salida a la misma. Es decir, la estratificación lingüística que propone Tarski es necesaria o no lo es. Si lo es, entonces la conclusión es en realidad un sinsentido puesto que da lugar a la predicación de la verdad y de la falsedad en el lenguaje objeto. Esto monta tanto como reclasificar la antinomia como una falacia, es decir, aquello que parecía un enunciado en realidad no lo era y no expresaba por tanto proposición alguna. En consecuencia, como decíamos, no ha habido “enganche” inicial para la cadena de razonamiento. Y si la estratificación lingüística no es necesaria, entonces la conclusión es contradictoria y al menos una premisa es falsa. Quizás esta hipótesis explique la ambivalencia de Tarski en plantear que la conclusión es un sinsentido, o una contradicción.

En Quine (1961), podemos señalar una discrepancia -quizás sólo terminológica- de que predica ‘paradoja’ de argumentos en lugar de argumentaciones. Sin embargo, una lectura detenida evidencia que su uso de ‘argumento’ incluye la presencia de cadenas de razonamiento. También en ocasiones, predica ‘paradoja’ de enunciados, en particular de conclusiones paradójicas: “cualquier conclusión que inicialmente suena absurda pero que tiene un argumento para apoyarla”. Sí resulta más importante indicar que Quine no dice lo que son las paradojas, excepto que subraya en varias ocasiones que causan “sorpresa”. En este sentido, podemos inferir, por tanto, que también para Quine, las paradojas son relativas al participante. Sin embargo, en ningún momento proporciona una explicación de en qué consiste esta sorpresa o de dónde proviene. Lo que, en cambio, sí proporciona

Quine es una clasificación de las soluciones o salidas a las paradojas. Esto garantiza también que las paradojas son para Quine reclasificables. Así distingue entre “paradojas” verídicas, antinomias, y falsídicas.

Inicialmente, una “paradoja” verídica es aquella que tiene una conclusión verdadera. Una antinomia es aquella “paradoja” que contiene una premisa falsa (usualmente una preconcepción crucial, que supone tener que rechazar concepciones heredadas). Finalmente, una “paradoja” falsídica es aquella que contiene alguna falacia de razonamiento. Sin embargo, una lectura detenida muestra que la clase de “paradojas” que Quine denomina verídicas incluyen a aquellas demostraciones indirectas o de absurdo, cuya conclusión es la negación de un supuesto inicial. Su ejemplo aquí es la paradoja del barbero, cuya conclusión es que no existe tal barbero. En su caso tampoco es nítida la frontera entre antinomias y “paradojas” falsídicas, ya que no excluye que las falsídicas puedan contener alguna premisa falsa, como cuando afirma que “lo que es antinomia para cierta persona, puede ser falsídica para otra, en un par de miles de años”. Su ejemplo, en el caso de las paradojas de Zenón, es “la noción de que una sucesión infinita de intervalos debe darnos un intervalo infinito”. Esto parece sugerir que una misma antinomia pudiera ser reclasificada como deducción (sus “paradojas” verídicas), o reclasificada como falacia (sus “paradojas” falsídicas). Es decir, que para un posible contemporáneo de Zenón, la salida a su paradoja sería una candidata a deducción, mientras que un contemporáneo nuestro la reclasificaría como una falacia. Esto sin duda subraya que Quine también considera las soluciones a las paradojas como relativas al participante.

Sin embargo, en el caso del principio de comprensión ingenuo en la paradoja de Russell afirma que “una antinomia establece que algún patrón de razonamiento tácito y en el que se ha confiado debe ser hecho explícito y de ahí en adelante evitado o revisado”. Las diferencias detectadas pudieran derivarse de la cuestión de inicio de que Quine se ocupa de caracterizar salidas a paradojas previas y, en parte también, de un uso ambivalente de palabras clave, porque en ocasiones predica ‘falacia’ de enunciados, a veces de nociones, y a veces de razonamientos.

Conviene indicar que tanto Tarski como Quine propugnan, sea en las antinomias semánticas o sea en las antinomias de los conjuntos, soluciones clásicas que introducen una estratificación lingüística en sistemas formalizados. En mi opinión, y en puridad, sus respectivas salidas a las paradojas presuponen una reclasificación de las mismas como falacias, concediendo sin duda, que la amplia fauna y rica proliferación de las falacias puede estar en la base de las mencionadas oscilaciones terminológicas de expresiones clave como ‘principios’ y ‘patrones’ en la presente discusión.

## 6. OTROS SENTIDOS DE LA PALABRA ‘PARADOJA’

El presente sentido del nombre ‘paradoja’ o del adjetivo ‘paradójica’ se aplica a argumentaciones y excluye su aplicación a argumentos, como hace Quine (1966/97) y a enunciados meramente contradictorios, como hace Krajewsky (1981). Específicamente, paradoja pertenece al género argumentación y requiere de una cadena de razonamientos **R**, la cual hace referencia ineludible a un agente pensante que mantiene ciertas creencias.

Algunos de los sentidos de paradoja no considerados en esta lección son los siguientes:

- 1 Acertijo: Para que un *enunciado* **p** sea “paradoja” para un agente **x** es necesario y suficiente que **x** crea que el enunciado **p** tenga un valor de valor (o verdadero o

falso) y sin embargo **x** esté inclinado a pensar que **p** tiene el valor de verdad opuesto. Ejemplo:

Algunas personas de veinte años sólo han tenido cinco cumpleaños.

- 2 Enigma: Se trata de una subclase de acertijos cuya comprensión requiere conocimiento técnico o teórico específico. Ejemplos:

Toda contradicción implica lógicamente cualquier proposición.

Toda tautología es implicada por cualquier proposición.

Ningún par de proposiciones son materialmente independientes.

- 3 Epigrama: En esta acepción el término ‘paradoja’ se predica de enunciados cuya retórica expresiva encierra alguna licencia poética—a veces hasta una contradicción literal—pero cuyo efecto semántico contextual expresa de modo terso un pensamiento profundo o cualificado. Ejemplos:

Casi nada de lo que dices sale de tu boca.

La certidumbre es enemiga del conocimiento.

- 4 Aforismo: Sin excluir las licencias retóricas y poéticas, un aforismo suele caracterizarse por expresar un pensamiento profundo con un tono crítico y satírico, a veces esperpéntico. Los aforismos de Cioran ejemplifican el caso:

La verdad empieza por un conflicto con la policía, y termina cuando los llamamos para que intervengan.

La lucidez es el único vicio que hace al hombre libre: libre en un desierto.

- 5 Paralogismo y Antinomia en Kant: Kant emplea ‘paralogismo’ como razonamiento incorrecto que resulta de la ilusión o tendencia ingenua de la razón a lo absoluto trascendiendo el marco de lo fenoménico. Sin embargo, en la concepción de Kant, los paralogismos no son objetos pragmáticos, sino más bien “sofismas no de los hombres sino de la razón pura misma”. Dentro de los paralogismos en la dialéctica trascendental desarrolla cuatro antinomias de la razón pura. Kant empleó la expresión ‘antinomia’ como un nombre común, no pragmático relacional, adquiriendo una significación idealizada dentro de su marco trascendental. Es decir, si el funcionamiento de la razón no se limita por la crítica, la tendencia a aplicar el entendimiento de modo trascendental conlleva al raciocinio incorrecto o falaz. Una antinomia para Kant involucra pares de argumentaciones explícitas, con conclusiones contradictorias u opuestas (tesis y antítesis). De estas ocho argumentaciones, siete se desarrollan mediante reducción al absurdo y una mediante razonamiento directo de su tesis.

- 6 Aporía: La expresión ‘aporía’ aparece notoriamente en el contexto de las paradojas de Zenón. Tentativamente, una aporía parece contener una argumentación implícita o presupuesta, y otra explícita y desarrollada. En el caso de Aquiles y la tortuga, la implícita suele ser una argumentación del sentido común sobre el movimiento real y la velocidad relativa de dos corredores, frente a la argumentación explícita al efecto de la imposibilidad de que el corredor más veloz (Aquiles) supere al más lento (la tortuga).

- 7 Dilema: Se trata de argumentaciones cogentes, frecuentemente empleadas en el debate público en la confrontación dialéctica entre dos argumentadores. El primero intenta desafiar al segundo mediante una argumentación que, partiendo de premisas

asumidas como verdaderas, establece una conclusión que debería ser verdadera. La estrategia del segundo argumentador se basa en mostrar que o la primera premisa (los cuernos del dilema) es falsa, o la segunda premisa (la disyunción de opuestos) es falsa. Así, (asumiendo la honestidad de los participantes), tenemos que, para el primer argumentador, la argumentación es cogente y tanto premisas como conclusión se presentan como verdaderas, mientras que, en el caso del segundo argumentador, tanto la conclusión como las premisas se creen falsas. Podemos incluir aquí, la “paradoja” de la inferencia de Cohen y Nagel al efecto de que la deducción es inútil o incorrecta, y la “paradoja” del comentario de texto de Derrida, al efecto de que todo comentario es inútil o irrelevante.

## 7. RECAPITULACIÓN Y COMENTARIOS FINALES

En este trabajo, el nombre ‘paradoja’ se dice de argumentaciones, las cuales son objetos relativos a agentes X en un tiempo T, donde las premisas se creen todas verdaderas, la cadena de razonamientos intermedios se cree cogente, y la conclusión se cree falsa. Puesto que ningún conjunto de premisas todas verdaderas tiene entre sus consecuencias una falsa, es evidente que una paradoja en este sentido involucra al menos una creencia equivocada en T por parte de X que requiere, por tanto, ser revisada.

Claramente, las paradojas así entendidas son objetos pragmáticos transitorios ya que el descubrimiento de una paradoja por X en T conlleva a que tarde o temprano X deba cambiar al menos una de sus tres creencias previas. La respuesta natural del X es revisar sus creencias hasta que compruebe la evidencia disponible u obtenga ulterior información que le permita identificar cuál o cuáles de sus tres creencias son equivocadas. Si el cambio de creencia se produce con respecto a la verdad de las premisas entonces la paradoja queda reclasificada como una “candidata” a deducción. Este caso abre la doble posibilidad de que se trate de una deducción indirecta de la falsedad de alguna de las premisas, o en algunos casos, de una deducción indirecta de la inconsistencia del conjunto de premisas. Si el cambio de creencia se produce con respecto a la cogencia de su cadena de razonamientos intermedios entonces la paradoja se reclasifica como candidata a falacia. Finalmente, si el cambio de creencia se produce con respecto a la falsedad de la conclusión entonces la paradoja se reclasifica como una candidata a prueba de su conclusión. Tanto solventar como resolver una paradoja son ambas relativas al participante X en un tiempo T.

Un modo virtualmente equivalente de definir ‘paradoja’ al desarrollado resulta de tomar las paradojas como pertenecientes al género *creencia*. Podemos decir así que el conjunto de nuestras creencias es paradójico, cuando creemos que las premisas son verdaderas, creemos que el razonamiento es cogente y creemos que la conclusión es falsa. Sumado a que sabemos que ningún conjunto de proposiciones verdaderas implica una falsa, obtenemos que nuestro conjunto de creencias es inconsistente o contradictorio y por tanto en necesidad de revisión. En esta alternativa, cabe decir que *descubrimos* una paradoja en nuestro conjunto de creencias si este es el caso. En el contexto de solventar la paradoja, resulta coherente decir que *descubrimos* que al menos una premisa era falsa, o que el razonamiento contiene alguna falacia, o que la conclusión es en realidad verdadera.

Concluyo indicando que en esta lección se han evitado deliberadamente expresiones adjetivas como ‘aparente’ y ‘genuina’ que no tienen rol explicativo en el sentido de ‘paradoja’ que se ha desarrollado. Por ejemplo, no hay paradojas “per se” en el presente sentido. Una paradoja “per se” pudiera o no tener la apariencia de paradoja. Supongamos que



alguien define ‘paradoja’ como una creencia en que cierta argumentación tiene premisas verdaderas, conclusión falsa, y cadena de razonamientos cogente. Por supuesto no existe tal argumentación. Por tanto, podríamos decir que X tiene una aparente paradoja, sin en realidad serlo, es decir, sin ser una paradoja genuina. *Mutatis mutandis*, a veces un cuadro de Escher se dice paradójico, donde un trampantojo contribuye a una representación visual contradictoria sin contrastación en la realidad física. Esta terminología resulta inapropiada al aplicarla a una argumentación que involucra creencias, donde decimos de modo coherente que X puede creer (incorrectamente) que todas las premisas son verdaderas, creer que la conclusión es falsa y creer que la cadena de razonamientos intermedios es cogente. Si bien el estudio de las creencias no está exenta de controversias, su naturaleza no parece sustentar que expresiones tales como ‘creencia aparente’ o ‘creencia genuina’ añadan calidad o perspicacia explicativa a la noción de paradoja desarrollada.

## Bibliografía

- Burge, T. (1979): “Semantical paradox”. *Journal of Philosophy* 76, 4: 169-198.
- Cantor, G. (1899): “Letter to Dedekind”. Incluido in Heijenoort, van (1967/76): 113-17.
- Cohen, M. y Nagel, E. (1962/93): *An introduction to logic*. Editado por John Corcoran. Indianapolis: Hackett Publishing Company.
- Corcoran, J. (1989): “Argumentations and logic”. *Argumentation* 3: 17-43. Versión castellana de Rubén Blanco revisada por José M. Sagüillo en *Agora* XIII/1 (1994): 27-55.
- Eemeren, van, Grootendorst, R. et al, eds. (1995): *Analysis and Evaluation. Proceedings of the Third ISSA Conference on Argumentation*. Amsterdam: University of Amsterdam.
- Fine, K. (1975): “Vagueness, Truth and Logic”. *Synthese* 30, 3-4: 265-300.
- Fitch, F. (1963): “A Logical Analysis of Some Value Concepts”. *The Journal of Symbolic Logic* 28, 2: 135-142.
- Frege, G. (1902): “Letter to Russell”. Incluido en Heijenoort, van (1967/76): 126-28.
- Gödel, K. (1931): “On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I”. Incluido en Heijenoort, van (1967/76): 596-616.
- Hart, W. (1979): “The epistemology of abstract objects”. *Proceedings of the Aristotelian Society* 53: 153-65.
- Heath, T. (1921/81): *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover Publications.
- Heijenoort, van, J. (1967/76) (ed): *From Frege to Gödel*. Cambridge, Massachusetts and London, England: Harvard University Press.
- Hintikka, J. (1962/79): *Saber y Creer*. Versión castellana de Juan J. Acero. Madrid: Tecnos.
- Kant, I. (2013): *Crítica de la Razón Pura*. Edición revisada de Pedro Ribas. Barcelona: Taurus.
- Kripke, S. (1975): “Outline of a Theory of Truth”. *Journal of Philosophy* 72: 690-716.
- Krajewski, S. (1981): ‘Antinomies’. Included in Marciszewski, W. (1981): 22-29.
- Marciszewski, W. (ed.) (1981): *Dictionary of Logic as applied in the Study of Language*. The Hague: Nijhoff.
- Mellor, D. (1990) (ed): *Philosophical Papers. F. P. Ramsey*. Cambridge: Cambridge University Press.



- Neumann, von, J. (1925): "An axiomatization of set theory". Incluido en Heijenoort, van (1967/76): 393-413.
- Priest, G. (1984): "Logic of Paradox Revisited". *Journal of Philosophical Logic* 13, 2: 153-179.
- Quine, W.V. (1961): "The Ways of Paradox". Included in Quine (1966/97): 1-18.
- Quine, W.V. (1966/97): *The ways of Paradox and other essays*. Revised and enlarged edition. Cambridge, Massachusetts and London, England: Harvard University Press.
- Quine, W. V. (1987): *Quiddities*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Ramsey, F. (1925): "The Foundations of Mathematics". Incluido en Mellor, D. (1990): 164-224.
- Rahman, S. *et al.* (2008): *Unity, Truth and the Liar*. Berlín: Springer.
- Read, S. (2008): "The Truth Schema and the Liar". Included in Rahman, S. *et al.* (2008): 3-17.
- Russell, B. (1902): "Letter to Frege". Incluido en Heijenoort, van (1967/76): 124-25.
- Sagüillo, J. M. (1995): "Paradoxical argumentations". Included in Frans H. van Eemeren *et al.*, eds. (1995): 13-22.
- Sagüillo, J. M. (1996): "The context of discovery of logic: The notion of paradox revisited". *Mind, reality and values*. Shbla: Open Society Fund: 61-76.
- Sagüillo, J. M. (2008): "On a New Account of the Liar". Included in Rahman, S. *et al.* (2008): 149-57.
- Sagüillo, J. M. (2011): "Antinomia". Incluido en Vega, L. y Olmos, P. (2011): 50-54.
- Skolem, T. (1922): "Some remarks on axiomatized set theory". Incluido en Heijenoort, van, J. (1967/76): 290-301.
- Tarski, A. (1944): "The Semantic Conception of Truth". *Philosophy and Phenomenological Research*. 341-375.
- Tarski, A. (1969): "Truth and Proof". *Scientific American*: 63-77.
- Vega, L. & Olmos, P. eds. (2011): *Compendio de Lógica, Argumentación y Retórica*. Madrid: Trotta.
- Wittgenstein, L. (1973/85): *Tractatus Logico-Philosophicus*. Versión castellana de Enrique Tierno Galván. Madrid: Alianza Universidad.
- Zermelo, E. (1908): "Investigations in the foundations of set theory I". Incluido en Heijenoort, van (1967/76): 199-215.