ARITMÉTICA SEMÁNTICA: UN PREFACIO*

John Corcoran
State University of New York

Traducción y notas de Gabriel Garduño-Soto
Universidad Nacional Autónoma de México
http://dx.doi.org/10.15304/ag.39.1.5841

Resumen

La teoría de números, o la aritmética pura, concierne a los números naturales mismos, no a la notación usada, y en particular no a los numerales. La teoría de ristras, o la sintaxis pura, concierne a los numerales como ristras de caracteres «no-interpretados», al margen de los números que puedan denotar cuando son usados. La teoría de los números es puramente aritmética, la teoría de ristras es puramente sintáctica… en tanto se considere el universo del discurso solo. La aritmética semántica es un amplio tema que se inicia cuando se menciona a los numerales (y no solamente sean usados) y éstos se mencionan como nombres de números (no tan sólo como objetos sintácticos). La aritmética semántica da lugar a muchos fascinantes y sorprendentes algoritmos y procesos de decisión; revela en forma vívida el importe experiencial de las proposiciones matemáticas y el poder predictivo del conocimiento matemático; aporta una interesante perspectiva para los estudios filosóficos, históricos y pedagógicos, acerca del crecimiento del conocimiento científico y del papel del discurso metalingüístico en el pensamiento científico.

Palabras clave: aritmética semántica, conocimiento matemático, teoría de números, teoría de ristras, Alfred Tarksi, Rudolf Carnap, Bernard Bolzano.

Recibido: 19/02/2019. Aceptado: 11/06/2019.

* John Corcoran, el autor, cordialmente agradece a Gabriel Garduño Soto, el traductor principal, por elaborar la traducción y supervisar la preparación y acabado de esta versión publicada en español. Corcoran y Garduño, conjuntamente reconocen con profunda gratitud la participación de los siguientes académicos: Rodolfo Ertola, Max Freund, Luis Estrada González, Henry Leal, Concha Martínez Vidal, José Miguel Sagüillo y otros. Henry Leal y Concha Martínez Vidal merecen crédito especial por su participación.

Abstract

Number theory, or pure arithmetic, concerns the natural numbers themselves, not the notation used, and in particular not the numerals. String theory, or pure syntax, concerns the numerals as strings of «uninterpreted» characters without regard to the numbers they may be used to denote. Number theory is purely arithmetic; string theory is purely syntactical… in so far as the universe of discourse alone is considered. Semantic arithmetic is a broad subject which begins when numerals are mentioned (not just used) and mentioned as names of numbers (not just as syntactic objects). Semantic arithmetic leads to many fascinating and surprising algorithms and decision procedures; it reveals in a vivid way the experiential import of mathematical propositions and the predictive power of mathematical knowledge; it provides an interesting perspective for philosophical, historical, and pedagogical studies of the growth of scientific knowledge and of the role metalinguistic discourse in scientific thought.

Keywords: Semantic Arithmetic, Mathematical Knowledge, Number Theory, String Theory, Alfred Tarski, Rudolf Carnap, Bernard Bolzano.

1. Aritmética pura

La aritmética pura, o teoría de números, trata acerca de los números naturales: los cardinales finitos, cero, uno, dos y así sucesivamente. Estos números a menudo se consideran como propiedades de conjuntos finitos. Por ejemplo, el número dos se toma como una propiedad que pertenece a un conjunto dado si y sólo si ese conjunto tiene exactamente dos miembros.

Uno de los principios más fundamentales de la aritmética es el *principio de inducción matemática*, el cual se expresa usando una frase que involucra a un numeral para el cero.

> PIM Toda propiedad que pertenezca al cero y al sucesor de cada número al cual pertenezca, también pertenece a todo número.

Las propiedades referidas en PIM son las propiedades aritméticas, o numéricas, que se cumplen para los números ya sean éstos nones, pares, primos, cero, un sucesor o un número distinto de su propio sucesor. El principio de inducción matemática proporciona una condición suficiente para que una propiedad sea universal, es decir, numérica o aritméticamente universal, esto es, para que una propiedad pertenezca a todos y cada uno de los números sin excepción. La propiedad de ser distinto de su propio sucesor es aritméticamente universal. De hecho, cada proposición aritmética universal adiciona a una proposición el efecto de que una cierta propiedad aritmética es universal.

Para que una propiedad dada sea aritmética es necesario y suficiente que esa propiedad sea predicable de manera coherente (es decir, verdadera o falsamente predicable) para todo y cada número. La propiedad de ser feliz, la propiedad de ser inteligente, la propiedad de ser femenino y la propiedad de tener una longitud de tres caracteres, son claramente no-aritméticas. Sería incoherente decir de un número que es feliz, inteligente, femenino o que tiene una longitud de tres caracteres.

A pesar de que muchas proposiciones aritméticas se expresan usando frases que emplean numerales, o nombres de números, existen muchas proposiciones aritméticas que se expresan normalmente usando frases sin numerales. El principio de los múltiplos asociados,[1] es un ejemplo especialmente adecuado porque este principio se usa en pruebas de algunos de los más hermosos resultados elementales de la aritmética semántica.

> PMA Cada dos números cuya suma o diferencia sea un múltiplo de un número dado son, o ambos múltiplos de ese número dado, o de lo contrario, ninguno lo es.

Lo anterior es, por supuesto, lógicamente equivalente a la proposición, según la cual, si la suma o la diferencia de dos números es un múltiplo de un número dado, entonces para que uno de ellos sea múltiplo del número dado, es necesario que el otro sea también un múltiplo de ese número dado.

Es importante notar que la palabra «dos» es usada en la expresión del PMA como adjetivo, no como un nombre propio, y, *a fortiori*, no como un nombre propio de un número. La expresión completa «cada dos números» funciona como una unidad, similarmente a un doble cuantificador universal, «para cada número *x*, para cada número *y*…» Tal vez sea útil revisar otros ejemplos de frases sin numerales. Considere el principio de infinitos números primos.

> PIP Todo número es excedido por un número primo.

Considere el teorema aritmético de Pitágoras.

> TAP Ningún número elevado al cuadrado es la suma de un menor número cuadrado consigo mismo.

Esto es equivalente a la proposición según la cual ningún cuadrado (numérico) es dos veces un menor número cuadrado. La calificación de «menor» es necesaria porque cero es la suma de cero con cero. El teorema aritmético pitagórico claramente equivale al teorema que la raíz cuadrada de dos no es racional, es decir, no es el cociente de un número natural entre un número natural… pero la referencia a la raíz cuadrada de dos nos lleva

[1] N.T. Importante propiedad de los múltiplos comúnmente enunciada en español de la siguiente manera: *Si un número es múltiplo de otros dos, también lo es de su suma y de su diferencia.*

más allá de la teoría de los números (la teoría de los números naturales), es decir, hacia la teoría de los números reales, que es también conocida como Análisis.

La teoría de los números naturales puede ser y ha sido formulada sin numerales. Estamos tan acostumbrados a usar numerales, de hecho numerales arábigos, para discutir los números naturales, que debemos recordarnos a nosotros mismos que esta útil notación es precisamente eso… notación. Es lamentable que la palabra «número» se haya convertido en una palabra ambigua y eso, en un sentido, la haga sinónimo de «numeral».

Las modernas formulaciones de la teoría de números dependen generalmente, en algún modo u otro, del trabajo de Peano y Dedekind. Una muy conveniente formulación, debida a Gödel, es presentada en un modo accesible en la página *xli* de la nueva edición del texto de Cohen-Nagel referenciado como Cohen-Nagel *(1993)* en la bibliografía.

2. Sintaxis pura

La sintaxis pura, o teoría de ristras pura, se refiere a ristras o cadenas de caracteres. Para los presentes propósitos los caracteres más prominentes son los diez dígitos arábigos: ‘0’, ‘1’, ‘2’, ‘3’, ‘4’, ‘5’, ‘6’, ‘7’, ‘8’ y ‘9’. Aparte de la ristra nula, cuya longitud consta de cero caracteres, o que tiene cero caracteres de longitud, cada ristra es el resultado de concatenar uno o más caracteres. Si limitamos nuestro universo de ristras a los numerales arábigos, entonces podemos establecer un principio de inducción de ristras análogo al principio de inducción matemática.

> PIC Toda propiedad que pertenece a la ristra nula y a la concatenación de cada dígito con cada ristra a la cual pertenece la propiedad, también pertenece a toda ristra.

La concatenación es la operación más fundamental con ristras; la concatenación de ‘456’ con ‘123’ es ‘456123’ (y no ‘123456’… la concatenación no es conmutativa como la adición, pero sí es, claro, asociativa). Las propiedades mencionadas en el principio de la inducción de ristras son propiedades sintácticas tales como ser un dígito, un no-dígito, un palíndromo (como ‘3223’ y ‘32123’), o ser una ristra distinta de la concatenación de un dígito consigo mismo.

Para que una ristra dada sea un palíndromo es necesario y suficiente que sea leído «de la misma manera hacia atrás». La ristra nula y los diez dígitos solos son palíndromos, y el resultado de concatenar el mismo dígito en ambos lados de un palíndromo es de nuevo un palíndromo. Una secuencia de palíndromos es: ‘00’, ‘1001’, ‘210012’. Otra secuencia de palíndromos es: ‘0’, ‘101’, ‘21012’, 3210123’. Para que una ristra sea periódica es necesario y suficiente que sea el resultado de la concatenación repetida de alguna ristra: ‘01’, ‘0101’, ‘010101’, etcétera.

Las propiedades sintácticas (o ristra-teoréticas) son predicables coherentemente de las ristras, pero no son predicables coherentemente de las no-ristras. Es incoherente decir de un número que es palíndromo o que es periódico (en el sentido arriba mencionado). Del mismo modo es incoherente decir de una ristra que es par, impar, prima o un múltiplo de nueve, etcétera. Los números forman una categoría y los numerales (más generalmente, las ristras) forman otra. Los errores categoriales resultan de predicar una propiedad de un objeto que se encuentra fuera del rango de aplicabilidad de esa propiedad.

La operación sintáctica (o ristra-teorética) de concatenación es una de las más fundamentales operaciones que se aplica a las ristras y produce ristras. Otra operación sintáctica es la inversión o reversión: La inversión de una ristra es el resultado de «escribir la ristra hacia atrás.» La ristra nula y los diez dígitos son inversiones de sí mismos y si una ristra dada es la inversa de una segunda, entonces la concatenación de la primera con un dígito dado es la inversa de la concatenación del dígito dado con la segunda. La última frase sugiere una definición recursiva de la inversión en términos de la concatenación, los dígitos y la ristra nula. Una vez que hemos mencionado «definición», debe quedar claro que la propiedad de ser palíndromo es definible en términos de inversión: Para que una ristra dada sea un palíndromo es necesario y suficiente que sea su propia inversa.

El desarrollo y la aplicación de la teoría de ristras tiene asociado un toque muy constructivo y geométrico; involucra lo que se ha denominado acertada, pero metafóricamente, «manipulación de símbolos.» Rudolf Carnap denominó pura sintaxis a «la geometría de la forma de los símbolos», una descripción pintoresca y sugestiva, Carnap *(1937)*.

Existen dos formulaciones clásicas de la teoría de ristras. Una, debida a Alfred Tarski, se presenta como parte del famoso artículo de definición de la verdad, Tarski *(1935)*. Otra, debida a Hans Hermes, aparecida por el mismo tiempo. Ambas son discutidas en detalle en Corcoran, Frank, Maloney *(1974)* donde se muestra que las dos teorías son definicionalmente equivalentes, pues aunque ambas teorías usan diferentes conjuntos de conceptos primitivos (y por ende diferentes conjuntos axiomáticos), es el caso que añadiendo definiciones adecuadas a una teoría, es posible deducir los axiomas y definiciones de la otra.

Discusiones acerca de teoría de ristras, teoría de números y las variedades de los principios de inducción que surgen de ellas pueden ser encontradas en mi artículo «*Categoricity*», referenciado como Corcoran *(1980)* en la bibliografía.

3. Aritmética Semántica

La aritmética semántica involucra como mínimo la construcción de una teoría que tiene dos universos de discurso, a saber, el de los números naturales y el de los numerales arábigos, donde los numerales son tomados como nombres de los números. Este marco integrado, da lugar a una nueva clase de propiedades aritméticas, por ejemplo, la de ser un número «de dos dígitos», y una nueva clase de propiedades sintácticas, por ejemplo, la de ser un numeral «primo», es decir, la de ser un numeral que denota a un número primo.

Tal vez la más obvia de las nuevas relaciones sintácticas es la de ser co-referencial: dos ristras son co-referenciales si y sólo si ambas denotan uno y el mismo número. Esta relación extrínsecamente sintáctica es co-extensiva con una relación intrínsecamente sintáctica. '00123' es co-referencial con '0123' y con '123': dos numerales son co-referenciales si y sólo si ambos son ristras de cifras ('0') o existe una ristra sin cifras iniciales '0', a partir de la cual cada una pueda ser construida por concatenación de cero o más cifras iniciales '0', así como '123' es una ristra sin cifras iniciales '0' a partir de la cual son construidas '0123' y '00123'.

La distinción entre propiedades extrínsecas e intrínsecas es una marca distintiva de la aritmética semántica. Una propiedad aritmética intrínseca es aquella que pertenece (o no pertenece) a un número en virtud de la naturaleza del número mismo y/o en virtud del lugar que el número toma en el sistema de los números naturales. Una propiedad sintáctica intrínseca es aquella que pertenece (o no) a una ristra en virtud de la naturaleza *per se* de esa ristra y/o en virtud del lugar que ocupa la ristra en el sistema de ristras. Las propiedades aritméticas normalmente consideradas en la aritmética pura son las intrínsecas y las propiedades sintácticas normalmente consideradas en la sintaxis pura son las intrínsecas —pero en ningún caso están las propiedades limitadas a ser las intrínsecas—. Las propiedades extrínsecas son aquellas que pertenecen (o no) a una clase de cosas en virtud, no de esa misma clase de cosas, sino más bien en virtud de su relación con otra clase. En el contexto de la aritmética semántica, una propiedad aritmética extrínseca pertenece (o no) a un número en virtud de los numerales que lo denotan. La propiedad de ser denotado por un numeral terminado en '0' es una propiedad aritmética extrínseca co-extensiva con la propiedad aritmética intrínseca de ser un múltiplo de diez. Asimismo, una propiedad sintáctica extrínseca pertenece (o no) a una ristra en virtud del número que denota. La propiedad de denotar un múltiplo de nueve es una propiedad sintáctica extrínseca que pertenece a '0', '9', '18', '27', etcétera.

Un resultado elemental en aritmética semántica que ilustra dramáticamente la característica interacción entre números y numerales, de referentes y nombres, ha sido llamado el corolario de Bolzano: la inversa de un numeral que denota a un múltiplo de nueve denota a un múltiplo de nueve. El corolario de Bolzano monta tanto como la proposición que la clase de ristras de dígitos que denotan múltiplos de nueve es invariante bajo la transformación sintáctica de la inversión.

Este sencillo, pero sorprendente, resultado se puede utilizar para ilustrar el importe experiencial de las proposiciones matemáticas: una persona que conoce una proposición matemática puede usar ese conocimiento para predecir las experiencias que la gente tendrá. De hecho, se podría decir que el conocimiento de las matemáticas se puede utilizar como sustituto de la experiencia, así como cuando una persona que conoce una proposición matemática dada sabe cuál va a ser el resultado de ciertos experimentos antes de que se realicen… pero si se sabe cuál va a ser el resultado del experimento, ¿cuál es el objeto de realizarlo?

Pida a un estudiante que escoja un número arbitrario, multiplíquelo por nueve y entonces tome la inversa del numeral resultante. Usted puede entonces predecir que si el estudiante divide esa inversa entre nueve obtendrá un número entero. O usted puede entonces predecir que si el estudiante sustrae repetidamente nueve el último resultado será cero.

La operación reversa, o inversa, es una operación sintáctica intrínseca que de ningún modo involucra considerar las ristras de dígitos como numerales. Para ilustrar una operación sintáctica extrínseca considere la operación de la suma repetida de dígitos, la cual se aplica a un numeral de longitud arbitraria. Sume los dígitos y escriba la suma como un numeral. Si el resultado no es un dígito repita el proceso. El último resultado es llamado la suma repetida de los dígitos del numeral. Por ejemplo, la suma de dígitos de '987654321' es '45' y la suma de dígitos de '45' es '9'; así que la suma repetida de dígitos de '987654321' es '9'. Claramente esta operación que mapea las clases de todos los numerales sobre los diez dígitos, es una operación sintáctica extrínseca.

Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci (1170-1240), en la baja Edad Media, ya conocía los resultados relacionados con las sumas repetidas de dígitos (Ore, *1948*, 225 ff.) Uno de los resultados de Fibonacci es que la suma repetida de los dígitos de un numeral arbitrario que denote a un múltiplo positivo de nueve es el dígito ‘9’. Armado con este resultado usted puede predecir que un estudiante que escoja un número distinto de cero, lo multiplique por nueve, y repetidamente sume los dígitos, al final llegará al dígito ‘9’.

4. Conclusiones

Para ilustrar el hecho de que tanto el corolario de Bolzano como el resultado de Fibonacci dependen de la notación decimal arábiga para los números naturales es suficiente considerar la notación arábiga ternaria en la que cada número se denota por una ristra que tan sólo contenga los dígitos ‘0’, ‘1’ y ‘2’. La posición de la derecha es, como antes, la de las unidades. La segunda posición (previamente la posición de las decenas) es ahora la posición de las ternas, o múltiplos del tres. La tercera posición (previamente la posición de las centenas) es ahora la posición de las nonas, o múltiplos del nueve. El numeral ‘100’ denota nueve; su inversa ‘001’ denota uno, el cual no es un múltiplo de nueve; su suma repetida de dígitos es ‘1’ y no, por supuesto, ‘9’.

De acuerdo con muchos historiadores el surgimiento de la natural notación decimal arábiga estuvo conectada con el descubrimiento del cero y el descubrimiento de la notación posicional o lugar-valuada. Algunos historiadores, por ejemplo, Ore (*1948*, 16), piensan que fue indispensable el descubrimiento del cero, o al menos el uso del «símbolo-cero» para indicar una «posición vacía» como en ‘204’. Sin embargo, este razonamiento evade la pregunta sobre si es necesaria una posición vacía. La aritmética semántica nos ayuda a liberarnos de nuestra dependencia de la notación familiar, a fin de que podamos responder la pregunta sobre si era necesario el descubrimiento del cero para desarrollar una notación posicional para los enteros positivos.

Considere la clase de ristras de los diez dígitos arábigos. Ahora reemplace cada ocurrencia de la cifra, o símbolo-cero, por la letra ‘T’. Entonces ‘0’ se convierte en ‘T’, ‘10’ deviene ‘1T’ y 90 ‘9T’, etcétera. Ahora interprete esas nuevas ristras exactamente como en la natural notación arábiga decimal, excepto que ahora tomará ‘T’ para denotar diez. Ya no existe un nombre para el cero. El nombre arábigo natural para el diez ya no está más disponible, pero ahora tenemos el nuevo nombre ‘T’. El nombre arábigo natural para el cien ya no está más disponible, pero ahora tenemos el nuevo nombre '9T' que muestra el noventa en la posición de las decenas y diez en la posición de las unidades… un total de cien. La conclusión es que esta nueva *notación arábiga decimal positiva* provee un nombre para todos y cada uno de los enteros positivos. Aún más, es más eficiente ya que no hay dos ristras de dígitos que denoten el mismo número;[2] en la *notación arábiga decimal positiva* cada numeral es co-referencial solamente consigo mismo, no hay dos numerales distintos que sean co-referenciales. Enfatizando, para tener una notación posicional para los enteros positivos, no es necesario tener «posiciones vacías» y tampoco es necesario tener un símbolo para cero. Esta conclusión, que contradice a diversas fuentes publicadas, es una que yo no he visto impresa antes.

No es necesario confinar la atención semántica a la aritmética. Si expandimos el universo numérico del discurso para incluir la clase de los números reales, entonces podemos hablar de análisis semántico. En este campo ampliado, la propiedad de ser algebraico (propiedad que ostentan los números reales que son soluciones de una ecuación algebraica) es vista como una propiedad analítica extrínseca, una propiedad que se predica coherentemente de los números reales, en virtud de su relación con ciertas ristras o cadenas de caracteres, por ejemplo, las ecuaciones algebraicas.

Esto nos conduce a la observación de que aun en la aritmética semántica no es necesario confinar nuestra atención sintáctica a los numerales. Si consideramos sentencias, por ejemplo ecuaciones constantes, entonces encontramos que la verdad (en el sentido Tarskiano no previamente usado en este artículo) es una propiedad sintáctica extrínseca.

Para que una ecuación constante sea verdadera es necesario y suficiente, que el término a la izquierda, denote el mismo número que denota el término a la derecha. Así «verdad», en su sentido derivado, es una propiedad sintáctica, una propiedad predicable coherentemente de las ristras, pero la cual pertenece a una ristra, no en virtud de su naturaleza como ristra, sino en virtud de su relación con aquello que se tome como referente. Incluso las propiedades sintácticas de ser sentencia y de ser una ecuación son extrínsecas. Algunas personas se desconciertan por el hecho de que la propiedad de ser una sentencia pueda ser sintáctica, pero no se confundirían si tuvieran que distinguir las propiedades sintácticas extrínsecas de las intrínsecas.

Carnap se encontraba confundido acerca de esta cuestión. Él enfatizaba que la verdad, incluso la analiticidad, es una propiedad sintáctica, pero no distinguía entre propiedades sintácticas intrínsecas y propiedades sintácticas extrínsecas. Fue el famoso artículo de Tarski sobre de la definición de la

[2] N.T. Como sucede en el caso de 00123 ó 0123 para el solo 123.

verdad, Tarski *(1935)*, que aclaró que la verdad es una propiedad sintáctica extrínseca. Aun hoy encontramos personas que enfatizan el hecho de que las deducciones son objetos sintácticos, y que la propiedad de ser una deducción es sintáctica, sin que lleguen a decir que la propiedad de ser una deducción es extrínsecamente sintáctica.

En tanto que una deducción es considerada en sí misma con respecto a propiedades intrínsecamente sintácticas no hay manera de entender cómo pueda cumplir su función deductiva de mostrar que una conclusión se sigue a partir de sus premisas. En muchos casos es una verdad a medias, confusa y engañosa, referirse a una propiedad como sintáctica sin indicar que no es intrínsecamente sintáctica, sin indicar que pertenece a sus ejemplificaciones no meramente en virtud de su naturaleza ristra-teorética, sino más bien en virtud de sus conexiones con cosas ajenas al universo de las ristras, en algunos casos con seres humanos.

Agradecimientos

Este artículo se basa en las conferencias presentadas en la Universidad de Santiago de Compostela, España, en el *Simposio sobre Problemas Semánticos en los Lenguajes Científicos* y aquellas dadas en el Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal. Especial agradecimiento a José M. Sagüillo, Juan Vázquez y Luis Villegas Forero de Santiago y a João Martins y Ernesto Morgado de Lisboa. Agradezco también a las Autoridades de mi Departamento, Peter H. Hare y John T. Kearns, y a mi Director, Ross D. MacKinnon, por hacer los arreglos que me relevaron de otras obligaciones para que yo pudiera dedicar tiempo a la investigación y la escritura. En las etapas finales de la preparación de este artículo fui asistido por Ky Herreid, Sriram Nambiar y José M. Sagüillo.

Bibliografía

Carnap, Rudolf (1937): *The Logical Syntax of Language*, London.

Cohen, Morris y Nagel, Ernest (1993): *Introduction to Logic*, Indianapolis.

Corcoran, John *et al.* (1974): «String Theory», *Journal of Symbolic Logic* 39: 625-637. https://doi.org/10.2307/2272846

Corcoran, John (1980): «Categoricity», *History and Philosophy of Logic* 1: 187-207. https://doi.org/10.1080/01445348008837010

Ore, Oystein (1948): *Number Theory and Its History*, New York.
Tarski, Alfred (1935): «The Concept of Truth in Formalized Languages», en Tarski 1983.
Tarski, Alfred (1983): *Logic, Semantics, Metamathematics*, second edition, Indianapolis.